제 2 교시

수학 영역

MENTOR

1. $\int_{-1}^{1}(x^3+a)dx=4$일 때, 상수 a의 값은?

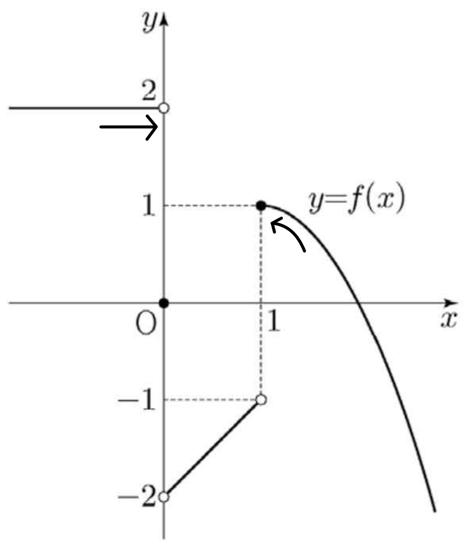
[2022학년도 예시문항 수학 2번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$2\int_0^1 a\,dx = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to0-} f(x)-\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

[2022학년도 예시문항 수학 4번]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$2-1=1$$

3. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x^2-kx+1, \quad f(0)=f(2)=1$$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

[2022학년도 예시문항 수학 6번]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

① 부정적분

$$f(x)=x^3-\frac{k}{2}x^2+x+1$$

$$f(2)=8-2k+2+1$$

$$=11-2k=1$$

$$\therefore k=5$$

② 정적분

$: f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx$

$$\int_0^2(3x^2-kx+1)\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{k}{2}x^2+x\right]_0^2$$

$$=8-2k+2=10-2k=0$$

$$\therefore k=5$$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-4 & (x<a) \\ x+3 & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

[2022학년도 예시문항 수학 7번]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$$|f(x)|=\begin{cases} |x-4| & (x<a) \\ |x+3| & (x\ge a)\end{cases}$$

$$|a-4|=|a+3|$$

$$a^2-8a+16=a^2+6a+9$$

$$14a=7$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

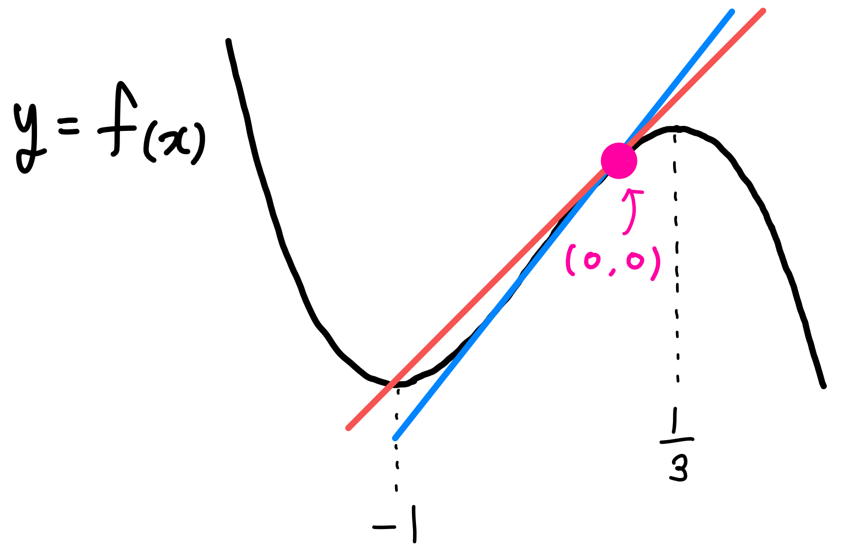
5. 원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은?

[2022학년도 예시문항 수학 9번]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$f(x) = -x^3-x^2+x$

$f'(x) = -3x^2-2x+1 = -(3x-1)(x+1)$



i) $f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서 접하는 직선의 기울기

$f'(0) = 1$

ii) $f(x)$ 위의 점 $(k, -k^3-k^2+k)$ 에서 접하고 원점 (0.0)을 지나는 직선의 기울기 $(k \neq 0)$

$\frac{-k^3-k^2+k}{k} = -3k^2-2k+1$

$-k^2-k+1 = -3k^2-2k+1$

$2k^2+k = k(2k+1) = 0$

$\therefore k = -\frac{1}{2} \quad (\because k \neq 0)$

$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}+1+1 = \frac{5}{4}$

$\therefore 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고,
> 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은?

[2022학년도 예시문항 수학 11번]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x) - 9 = (x-a)(x-ar)(x-ar^2) \cdots ㉠$

$f'(x) = (x-ar)(x-ar^2) + (x-a)(x-ar^2) + (x-a)(x-ar)$

㉠ 식에 $x=0$ 대입

$-8 = -a^3r^3 \qquad \therefore ar=2$

$\therefore f'(x) = (x-2)(x-2r) + (x-a)(x-2r) + (x-a)(x-2) \cdots ㉡$

㉡ 식에 $x=2$ 대입

$-2 = (2-a)(2-2r) = 2(2-a)(1-r)$

$-1 = 2-2r-a+ar = 4-2r-a$

$\therefore 2r+a=5$

$\begin{cases} ar=2 \\ 2r+a=5 \end{cases} \Rightarrow a=1,\ r=2 \ \text{ or } \ a=4,\ r=\frac{1}{2}$

두 경우 모두에서

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)+9$

$\therefore f(3) = 2\times1\times(-1)+9 = 7$

7. $0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-3x+k)dx>0$$

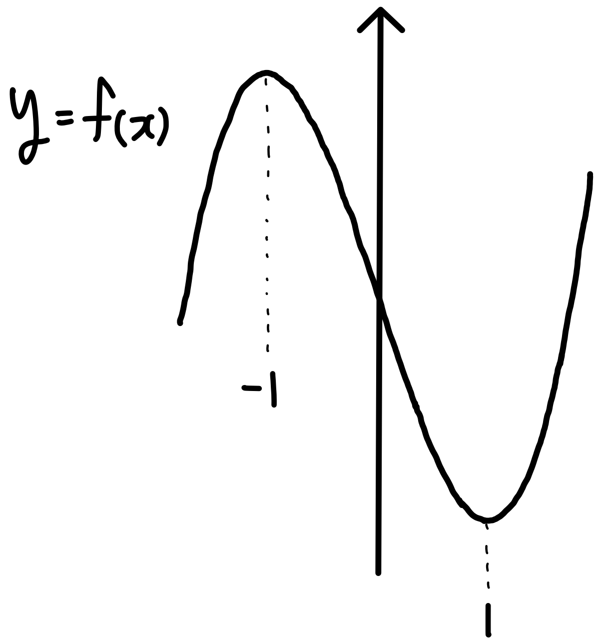
이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[2022학년도 예시문항 수학 12번]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=x^3-3x+k$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$



$\int_a^b f(x)dx>0$ 이려면

$x\ge 0$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이어야 한다.

$\rightarrow f(1)\ge 0$

$k-2\ge 0$

$\therefore k\ge 2$

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\ (t\ge 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

~~ㄴ~~. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 ~~두 번~~ 바뀐다. (한 번)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

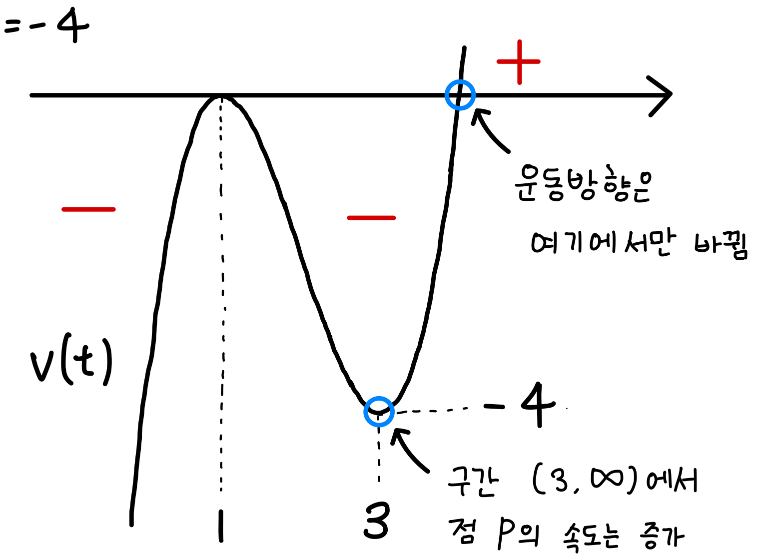
[2022학년도 예시문항 수학 14번]

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

속도 $v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

가속도 $a(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

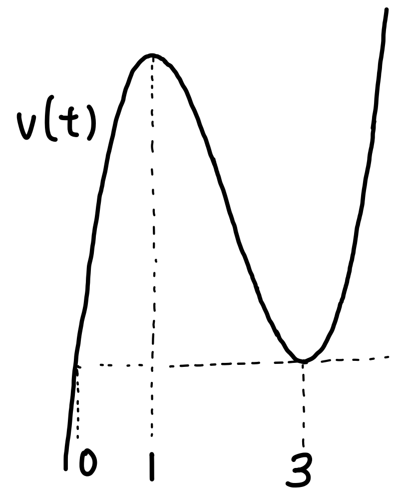
ㄱ, ~~ㄴ~~. $k=-4$



ㄷ. 점 P의 위치 변화량과 움직인 거리가 같으려면

$\int v(t)dt=\int |v(t)|dt$

즉, $v(t)\ge 0$ 이어야 한다.



닫힌구간 $[0, 5]$에서

$v(t)$의 최솟값은

$v(0)=v(3)=k$

$\therefore k\ge 0$

9. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

[2022학년도 예시문항 수학 17번]

$$g'(x) = f(x) + (x+1)f'(x)$$
$$g'(1) = f(1) + 2f'(1)$$
$$= 2 + 8 = 10$$

10

10. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^4+kx+10$이 $x=1$에서 극값을 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[2022학년도 예시문항 수학 19번]

$$f'(x) = 4x^3 + k$$
$$f'(1) = 4 + k = 0$$
$$\therefore k = -4$$

$$f(1) = 1 + k + 10 = 7$$

7

11. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

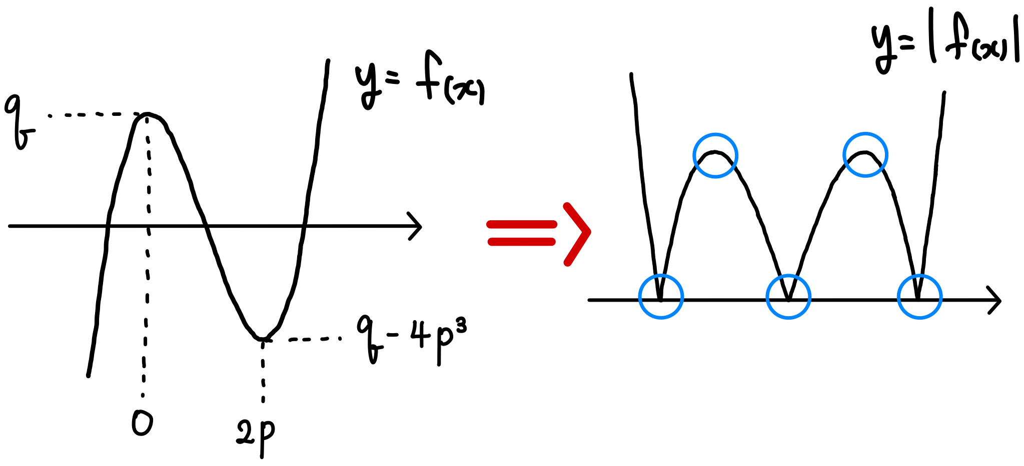
가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오.

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

[2022학년도 예시문항 수학 22번]

$$f'(x)=3x^2-6px$$
$$=3x(x-2p)$$

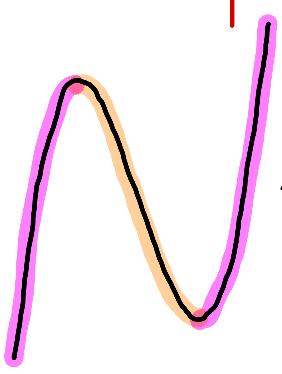
(가) $|f(x)|$가 5곳에서 극값을 가지려면



x축이 $f(x)$의 극값들 사이에 존재해야 한다.

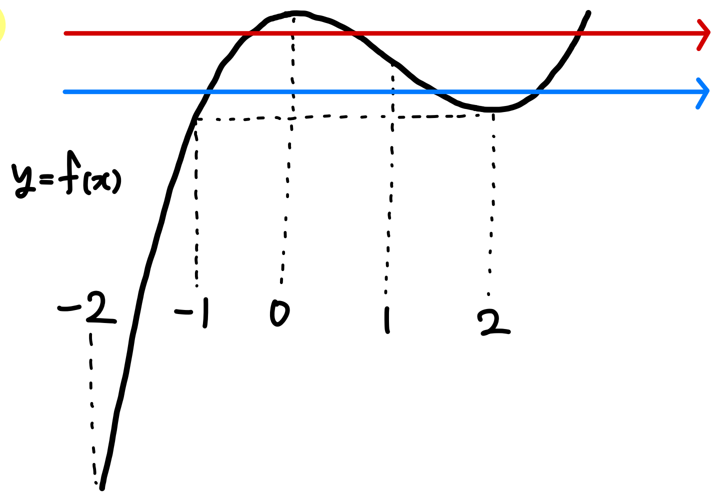
$\therefore\ 0<q<4p^3$

Tip



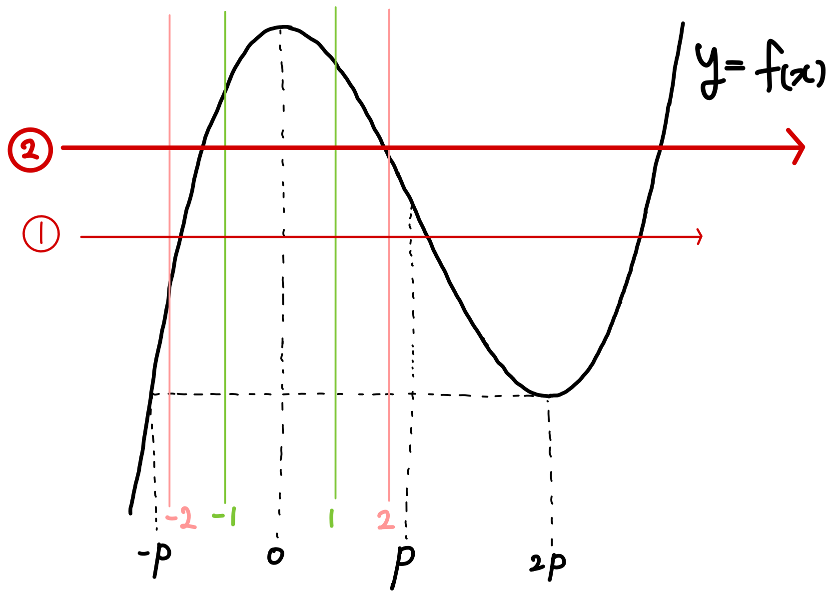
삼차함수 그래프에서 (분홍) 부분이 (주황) 부분보다 변화폭이 크다.

i) $p=1$



삼차함수 그래프의 개형상 불가능하다.
닫힌구간 $[-1,1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값은 $|f(-1)|$과 $|f(0)|$이 될 수 있는데, 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $|f(-2)|$가 항상 $|f(0)|$, $|f(-1)|$보다 크다.

ii) $p\geq 2$, 이 때 $f(-2)=-8-12p+q<0$
($\because$ 25 이하의 두 자연수 p, q)



x축이 ① → ②처럼 점점 올라간다고 생각해보자.
$|f(x)|$의 닫힌구간 $[-2,2]$에서 최댓값이 닫힌구간 $[-1,1]$에서 최댓값과 같으려면
$-f(-2)=f(0)$인 순간까지 올라갈 수 있다 → ②의 상황
(그 이상 올라가면 닫힌구간 $[-2,2]$에서의 최댓값이 더 커진다.)

$\therefore -f(-2)\leq f(0) \Rightarrow 8+12p-q\leq q$ $\quad \therefore 6p+4\leq q$

따라서,
$6p+4\leq q<4p^3$

1) $p=2$, $16\leq q<32$ 10개 (16~25)
2) $p=3$, $22\leq q<108$ 4개 (22~25)

$\therefore\ 10+4=14$