정답과 해설

2회차 정답표

1. ①	2. ③	3. ②	4. ④	5. ①
6. ①	7. ③	8. ①	9. ②	10. ⑤
11. ④	12. ②	13. ④	14. ③	15. ⑤
16. ⑤	17. ⑤	18. ④	19. ③	20. ②
21. ④	22. 10	23. 62	24. 13	25. 12
26. 12	27. 227	28. 27	29. 57	30. 68

1. 정답 : ①

$\log_5 \frac{3}{4} + \log_5 \frac{4}{3} = \log_5\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) = \log_5 1 = 0$

2. 정답 : ③

두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고 따라서

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \mathrm{P}(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{P}(A) \Rightarrow \frac{2}{3}\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$

3. 정답 : ②

$\sin 3x - \sin 2x = 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}$이므로

$\sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2} = 0 \quad \left(\because 0 < x \leq \frac{\pi}{2}\text{이므로 } \sin\frac{x}{2} \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5}$

4. 정답 : ④

$A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & k-4 \\ k-6 & -3 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으려면 $(k-4)(k-6) = 0$ 이어야 한다. 따라서 $k = 4, 6$이고 이 값들의 합은 10

5. 정답 : ①

$f(3^x) \leq 9^x + 1 \Leftrightarrow f(t) \leq t^2 + 1 \quad \left(t = 3^x\text{로 치환, } t > 0\right)$

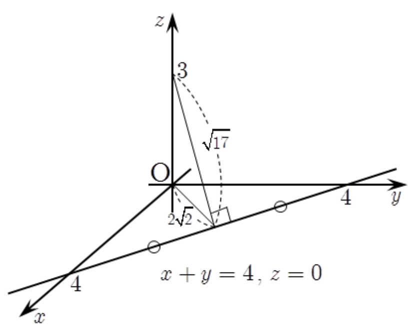
$\Leftrightarrow t^3 - 10t^2 + 9t \leq 0,\ t > 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-9) \leq 0,\ t > 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq t \leq 9 \Leftrightarrow 3^0 \leq 3^x \leq 3^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

이므로 조건을 만족하는 자연수 x는 $x = 1, 2$ 뿐이다. $1 + 2 = 3$

6. 정답 : ①



구와 직선이 한 점에서만 만나려면 구의 중심에서 직선으로 내린 수선의 발의 길이가 구의 반지름과 같아야 한다. $(0, 0, 3)$에서 xy평면으로 내린 수선의 발은 원점이고 길이가 3이다. 원점에서 직선 $x + y = 4,\ z = 0$으로 내린 수선의 발의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $(0, 0, 3)$에서 직선 $x + y = 4,\ z = 0$으로 내린 수선의 발의 길이는 $\sqrt{17}$이다.

7. 정답 : ③

(가)에 의해 $(A - 2E)(A - E) = A^2 - 3A + 2E = 6E$이다.

(나)의 양 변의 왼쪽에 $(A - 2E)$를 곱하면 (가)에 의하여

$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = (A - 2E)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$이다.

즉, $(A - 2E)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(A - 2E)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$이므로 $x = 12$, $y = 24$ 이고 $x + y = 36$

8. 정답 : ①

$f(1) = 3,\ \frac{f(1)}{g(1)} = 9,\ \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2} = 3$ 이므로

$f'(1)g(1) - f(1)g'(1) = 3\{g(1)\}^2 = 3\left\{\frac{f(1)}{9}\right\}^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

9. 정답 : ②

주어진 조건에 의해 다음 등식이 성립한다.

$\log_a 1 = 3 + \log_a(0.4 \times 20) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ …… ㉠

두께가 $0.3\,\mathrm{mm}$인 필터가 n개 있는 정수기 A로 이물질의 비율이 $60\,\%$인 물을 정수했을 때 정수한 물에 포함된 이물질의 비율을 $I(\%)$라 하면 $\log_a I = n + \log_a(0.3 \times 60)$가 성립하고

$I \leqq 2 \Leftrightarrow \log_a I \geqq \log_a 2 \ (\because 0 < a < 1)$

$\Leftrightarrow n + \log_a 18 \geqq \log_a 2$

$\Leftrightarrow n \geqq \log_a \frac{1}{9} = \log_2 9 = 3.\times\times\cdots \ (\because ㉠)$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4

10. 정답 : ⑤

수열 $\{b_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로 $b_{n+2} - b_n = 4$ 이고

따라서 (가)에 알맞은 값은 $p = 4$ …… ㉠

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}}\right) = \left(\frac{1}{b_1} - \cancel{\frac{1}{b_3}}\right) + \left(\frac{1}{b_2} - \cancel{\frac{1}{b_4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{b_3}} - \cancel{\frac{1}{b_5}}\right) +$$

$$\cdots + \left(\cancel{\frac{1}{b_{n-2}}} - \cancel{\frac{1}{b_n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{b_{n-1}}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{b_n}} - \frac{1}{b_{n+2}}\right)$$

$$= \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+2}}$$

이므로 (나)에 알맞은 식은 $f(n) = \frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+2}}$ …… ㉡

수열 $\{b_n\}$이 공차가 2인 등차수열이고 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$이므로

$b_2 = 3$이고 $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{3}$이다. 따라서 (다)에 알맞은 값은

$q = \frac{1}{\boxed{(가)}}(a_1 + a_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\frac{f(p)}{q} = 3\left(\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_6}\right) = 3\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) = \frac{20}{33}$

11. 정답 : ④

도형의 방정식 $x^2 - ay^2 = 1$이 쌍곡선이 되기 위해서는 $a > 0$이어야 한다. 이 쌍곡선 위의 y좌표가 1인 점은 $(\pm\sqrt{a+1},\ 1)$이고 이 점에서 그은 쌍곡선의 접선의 방정식은 $\pm\sqrt{a+1}\,x - ay = 1$이고 이 접선이 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 지나기 때문에 $x = 0,\ y = -\frac{1}{4}$를 대입하면

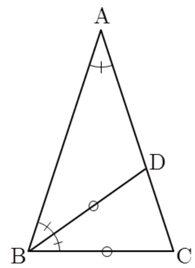
$a = 4$

12. 정답 : ②

인접행렬의 모든 성분의 합$= 2 \times$(그래프의 변의 개수)

이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은 18, 행렬 B의 모든 성분의 합은 12이고 따라서 행렬 $A - B$의 모든 성분의 합은 $18 - 12 = 6$

13. 정답 : ④



$\triangle$ABC와 $\triangle$BCD는 $\angle$C를 공유하는 이등변삼각형이므로 서로 닮음이다.

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$가 성립하므로 다음 등식이 성립한다.

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 1 : x : x^2$ … ㉠

$\overline{AD} + \overline{CD} = \overline{AB}$라는 사실과 ㉠을 이용하면

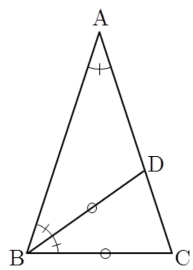
$\overline{AD} : \overline{CD} = (\overline{AB} - \overline{CD}) : \overline{CD} = (1 - x^2) : x^2$ …… ㉡

인데 선분 BD는 $\angle$ABC의 이등분선이므로

$\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : x$가 성립한다. 이제 ㉡에 의해서

$1 : x = (1 - x^2) : x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = x \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \ (\because x > 0)$

14. 정답 : ③

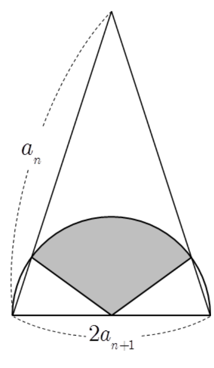


$\angle$B의 이등분선과 선분 AC의 교점 D가 $\overline{BC} = \overline{BD}$를 만족하면 두 삼각형 $\triangle$ABC, $\triangle$BCD의 닮음으로 인해 $2\angle A = \angle B$가 되고 삼각형의 내각의 합이 π이므로

$\angle A + \angle B + \angle C = 5\angle A = \pi,\ \angle A = \frac{\pi}{5}$ … ㉠

n번째 [시행]에 의해 그려지는 2^n개의 합동인 이등변삼각형의 긴 변의 길이를 a_n이라 하자. ㉠에 의하여 n번째 [시행]에서 색칠되는 부분은 반지름이 a_n, 중심각이 $\frac{3\pi}{5}$인 부채꼴 2^{n-1}개의 내부이므로

그 넓이가 $\frac{3\pi}{5} \cdot 2^{n-2} \cdot (a_n)^2$이다. … ㉡



오른쪽 그림에서 다음 점화식을 구할 수 있다.

$a_n : 2a_{n+1} = 1 : \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} a_n$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 무한히 색칠되는 부분의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3\pi}{5}\cdot 2^{n-2}\cdot (a_n)^2\right\}=\frac{\frac{3\pi}{5}\cdot 50\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}{1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=(15\sqrt{5}-30)\pi$$

15. 정답 : ⑤

$\int_1^4 \frac{f(t)}{t^2}dt=A$ ⋯⋯ ㉠ 라 하면 $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+A$ 이고 ㉠에 이를 다시 대입하면 다음 등식이 성립한다.

$$A=\int_1^4\left\{\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}+\frac{A}{t^2}\right\}dt$$

$$=\int_1^4\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}dt+\frac{3}{4}A$$

$$=-2\int_1^{\frac{1}{2}}ye^y dy+\frac{3}{4}A \quad \left(\frac{1}{\sqrt{t}}=y\text{로 치환}\right)$$

$$=2\Big[(y-1)e^y\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\frac{3}{4}A=\sqrt{e}+\frac{3}{4}A \Leftrightarrow A=4\sqrt{e}$$

따라서 $f(4)=\sqrt{e}+4\sqrt{e}=5\sqrt{e}$

16. 정답 : ⑤

확률 변수 X를 올 해 1년 동안 사고가 난 차량 1960대 중 과속하지 않은 상태에서 사고가 난 차량의 개수라 정의하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(1960, p)$를 따른다. (단, p는 사고가 난 차량이 과속하지 않은 상태였을 확률)

고속도로를 이용하는 차량이 교통사고가나는 사건을 A,

고속도로를 이용하는 차량이 과속하지 않는 사건을 B라 하면

$$p=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.8\times 0.0001}{0.2\times 0.001+0.8\times 0.0001}=\frac{2}{7}$$

따라서 $X \sim \mathrm{B}\left(1960, \frac{2}{7}\right) \sim \mathrm{N}(560, 20^2)$ 이고

$\mathrm{P}(X\geq 520)=\mathrm{P}(Z\geq -2)=0.977$

17. 정답 : ⑤

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{PB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{PB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

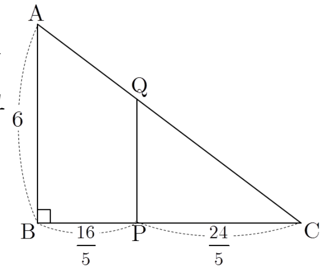
ㄱ. $\frac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{5}=\vec{0}$이므로 점 P는 두 점 B, C의 $2:3$ 내분점이다. (∴ 거짓)

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$

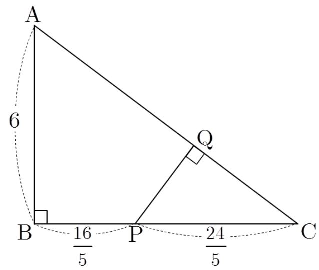
이므로 선분 PQ는 선분 BC에 수직한다. △ABC는 △QPC와 서로 닮음이고 ㄱ.에 의하여 그 닮음비는 $5:3$이다. 따라서

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{3}{5}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{18}{5}$ (∴ 참)



ㄷ. $0\leq t\leq 1$인 실수 t에 대하여 $t\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PC}}$는 점 P를 시점으로 가지고 선분 AC 위의 점을 종점으로 가지는 벡터다. 따라서 $|t\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$의 최솟값은 점 P에서 선분 AC로 내린 수선의 발의 길이다.

점 P에서 선분 AC로 내린 수선의 발을 Q라 하면 두 삼각형 △ABC, △PQC가 서로 닮음 이고 그 닮음비는 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{PC}}=10:\frac{24}{5}=25:12$이다.

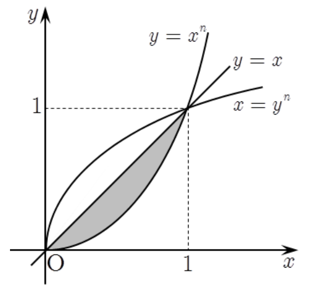


따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{12}{25}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{72}{25}$

(∴ 참)

18. 정답 : ④

$n\geq 2$일 때, 두 곡선 $y=x^n$, $x=y^n$은 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 a_n은 제 1사분면에서 $y=x^n$과 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 두 배와 같다.



$$a_n=2\int_0^1(x-x^n)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{2}{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{70}(a_na_{n+1}-a_{n+1}-a_n+1)=\sum_{n=2}^{70}(a_{n+1}-1)(a_n-1)$$

$$=\sum_{n=2}^{70}\frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

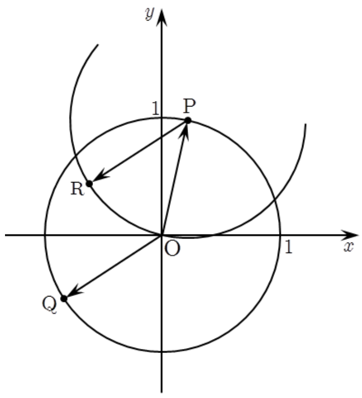
$$=4\sum_{n=2}^{70}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{72}\right)=\frac{23}{18}$$

19. 정답 : ③

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$을 만족하는 점 R을 생각하자.

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}$

이므로 철수가 단위원 위의 어떤 점 P를 선택하더라도 영희가 선택한 점 Q가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|\leq 1$를 만족할 확률은 점 R이 단위원 $x^2+y^2=1$의 경계 혹은 내부에 있을 확률로써 일정하다. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 R이 주어진 조건을 만족할 확률은



$\left(\dfrac{\text{원이 } x^2+y^2=1 \text{ 으로 인해 잘리는 짧은 호의 길이}}{\text{반지름이 1인 원의 둘레의 길이}}\right)$이므로 $\dfrac{1}{3}$이고

따라서 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|\leq 1$일 확률은 $1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

20. 정답 : ②

$f'(t)=4t^3-4t+3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=(4t^3-4t+3)(x-t)+t^4-2t^2+3t-4 \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이러한 접선 중 $(0, -5)$를 지나는 접선을 찾아야 하므로 $x=0, y=-5$를 대입하면

$$3t^4-2t^2-1=0 \Leftrightarrow t^2=-\frac{1}{3}, 1 \Leftrightarrow t=1, -1$$

㉠에 $t=1$을 대입하면 $y=3x-5$, ㉠에 $t=-1$을 대입하면 $y=3x-5$ 이므로 접선의 개수는 1개다.

21. 정답 : ④

$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{b_k}{a_k}\times a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{b_k}{a_k}\times\dfrac{1}{10^{n-1}}\right)$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 일의 자리의 숫자가 $\dfrac{b_1}{a_1}$, 소수점 n번째 자리 수는 $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$인 무한소수로 생각 할 수 있다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2.22\cdots=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{10}}=\dfrac{20}{9}$ (∴ 거짓)

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{b_{n+k}}{a_{n+k}}=\dfrac{b_n}{a_n}$을 만족하는 자연수 k가 존재하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 순환하는 무한소수이고 따라서 유리수다. (∴ 참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{16}{27}=\dfrac{592}{999}=0.\dot{5}9\dot{2}$이므로 $\dfrac{b_1}{a_1}=0$, $\dfrac{b_2}{a_2}=5$, $\dfrac{b_3}{a_3}=9$이다.

따라서 $\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\dfrac{b_3}{a_3}=14$ (∴ 참)

22. 정답 : 10

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+10x)}{10x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot10\right)=10$$

23. 정답 : 62

$\{a_n\}$이 등차수열이므로

$124=a_8+a_{16}=a_9+a_{15}=a_{10}+a_{14}=a_{11}+a_{13}=2a_{12}$

이고 따라서 $a_{12}=62$

24. 정답 : 13

일차변환 f에 의해 선분 I_1이 선분 I_2로 옮겨지기 위해서는 f에 의하여 I_1의 양 끝점이 I_2의 양 끝점으로 각각 옮겨져야 한다.

(1) $f:(1, 0)\to(-12, 0)$, $f:(0, 1)\to(0, -5)$인 경우

f를 나타내는 행렬을 A라 하면

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-10\end{pmatrix}$

이므로 $f:(1, 2)\to(-12, -10)$

(2) $f:(1, 0)\to(0, -5)$, $f:(0, 1)\to(-12, 0)$인 경우

f를 나타내는 행렬을 A라 하면

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\-5\end{pmatrix}$

이므로 $f:(1, 2)\to(-24, -5)$

따라서 $(1, 2)$가 옮겨질 수 있는 두 점 $(-12, -10)$, $(-24, -5)$ 사이의 거리는 13이다.

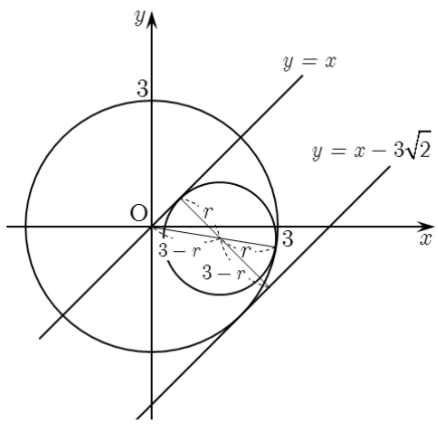
25. 정답 : 12

(사탕의 개수, 초콜릿의 개수, 마카롱의 개수)와 같이 순서쌍으로 표현하면 다음과 같이 총 12개의 서로 다른 선물세트를 만들 수 있다.

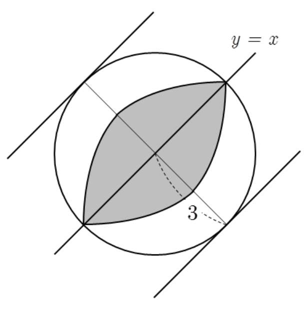
$$(3,2,0),\ (3,1,1),\ (3,0,2)$$
$$(2,3,0),\ (2,2,1),\ (2,1,2)$$
$$(1,4,0),\ (1,3,1),\ (1,2,2)$$
$$(0,5,0),\ (0,4,1),\ (0,3,2)$$

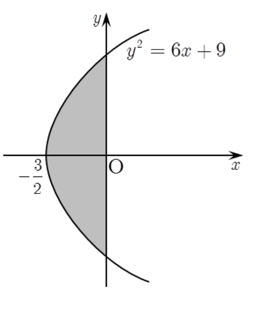
26. 정답 : 12

원 C'의 반지름을 r이라 하면 두 원 C, C'가 서로 내접하기 때문에 C'의 중심과 원점 사이의 거리는 $3-r$이다.
원 C'가 직선 $y=x$에 접하기 때문에 C'의 중심과 $y=x$ 사이의 거리는 r이다.



이제 위 그림과 같이 직선 $y=x$와 평행하고 $y=x$로부터의 거리가 3인 직선 $y=x-3\sqrt{2}$을 생각하면 원 C'의 중심과 $y=x-3\sqrt{2}$ 사이의 거리가 $3-r$이고 따라서 원 C'의 중심은 원점을 초점, $y=x-3\sqrt{2}$를 준선으로 가지는 포물선 위의 점임을 알 수 있다.





구하고자 하는 넓이는 위 왼쪽 그림에 색칠된 부분이고 이를 구하기 위해 초점과 준선 사이의 거리가 3인 포물선 $y^2=6x+9$를 생각하자. 구하고자 하는 넓이를 S라 하면 S는 포물선 $y^2=6x+9$와 y축이 만드는 부분의 넓이의 두 배이므로

$$S=2\int_{-3}^{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{y^2}{6}\right)dy=4\int_{0}^{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{y^2}{6}\right)dy=4\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)=12$$

27. 정답 : 227

임의의 양수 X에 대하여 $0 \leqq g(X) < 1$이므로 $f(n_1) < f(n_2)$이면 반드시 $f(n_1)-g(n_1) < f(n_2)-g(n_2)$이다. 이제 $f(n)$의 값이 작은 자연수 n부터 차례대로 나열하자.

(1) $f(n)=0$인 경우
$f(n)-g(n)$의 값을 작은 것부터 시작하여 크기 순서대로 배열하면 다음과 같다.
$-\log 9\ (=a_1),\ -\log 8,\ -\log 7,\ \cdots,\ -\log 2,\ -\log 1\ (=a_9)$

(2) $f(n)=1$인 경우
$f(n)-g(n)$의 값을 작은 것부터 시작하여 크기 순서대로 배열하면 다음과 같다.
$1-\log 9.9\ (=a_{10}),\ 1-\log 9.8,\ 1-\log 9.7,\ \cdots,\ 1-\log 1.0\ (=a_{99})$

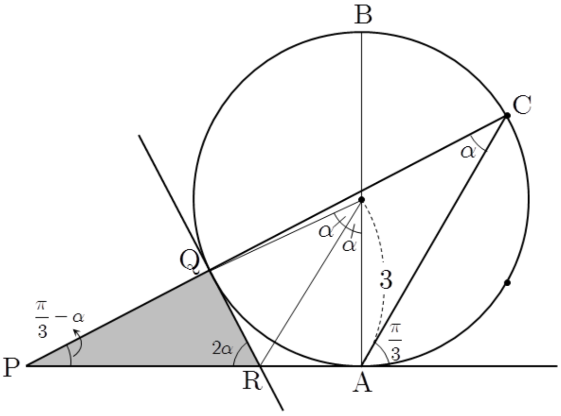
$\vdots$

$a_{35}=1-\log 7.4,\ a_{100}=2-\log 9.99$ 이므로
$a_{100}-a_{35}=1+\log\dfrac{740}{999}=1+\log\dfrac{20}{27}=\log\dfrac{200}{27}$ 이고 따라서
$p=27,\ q=200$이다. $p+q=227$

28. 정답 : 27

$\angle \mathrm{PCA}=\alpha$라 하면 $\theta \to \dfrac{\pi}{3}-0$ 일 때, $\alpha \to +0$임이 자명하다.
이제 $\triangle \mathrm{PQR}$의 넓이를 α에 대한 함수로 생각하여 $S(\alpha)$라 하면 주어진 조건은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{\alpha \to +0}\frac{S(\alpha)}{\alpha^n}=T\ (\neq 0)$$



위 그림에서 다음 사실을 알 수 있다.

$$\overline{\mathrm{RA}}=\overline{\mathrm{RQ}}=3\tan\alpha \ \cdots\cdots \ ㉠, \ \angle \mathrm{PRQ}=2\alpha \ \cdots\cdots \ ㉡$$

$\angle \mathrm{PQR}=\frac{2\pi}{3}-\alpha$이므로 삼각형 PQR에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)} \ \Rightarrow \ \overline{\mathrm{PR}}=\frac{3\tan\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} \ \cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 이용해 $S(\alpha)$를 구하면

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RP}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin2\alpha$$

$$=\frac{9\tan^2\alpha\sin2\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$$

이고 따라서 $n=3$일 때,

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{S(\alpha)}{\alpha^n}=9\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=9 \ \ (\neq 0)$$

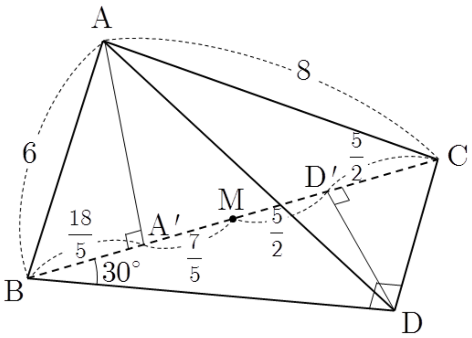
이고 따라서 $n=3$, $T=9 \Rightarrow nT=27$

29. 정답 : 57

두 점 B, C의 중점을 M이라 하면 점 M은 두 직각삼각형 ABC, BCD의 빗변의 중점이므로 $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MC}}=\overline{\mathrm{MD}}=5$이고 따라서 점 M이 구 R의 중심임을 알 수 있다.

α, β는 각각 A, D를 접점으로 가지는 구 R의 접평면이므로 구의 중심 M에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MD}}$는 각각 α, β의 법선벡터다.

두 평면 α, β가 이루는 예각을 θ라 하면 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|}\right|$이다. …… ㉠



두 점 A, D에서 선분 BC로 내린 수선의 발을 각각 A′, D′라 하자. 두 평면 △ABC, △BCD이 수직하므로 두 평면의 교선에 수직한 두 직선 AA′, DD′가 서로 수직한다. 따라서 ㉠에 의해

$$\cos\theta=\left|\frac{(\overrightarrow{\mathrm{MA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'A}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MD'}}+\overrightarrow{\mathrm{D'D}})}{|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{MD}}|}\right|$$

$$=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{MA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'A}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'D}}|}{25}$$

$$=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{MA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD'}}|}{25}=\frac{7}{50}$$

따라서 $p=50$, $q=7$이고 $p+q=57$

30. 정답 : 68

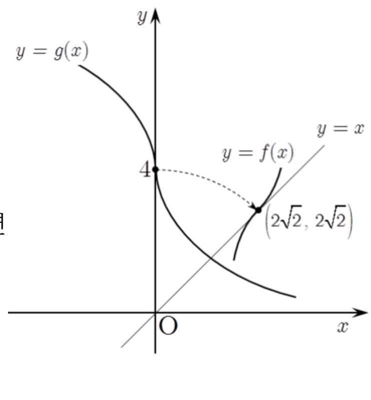
$y=f(x)$의 그래프가 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수이므로 (나)에서 말하는 $g(x)$의 미분 불가능성은 y축과 평행한 접선을 가지는 경우뿐이다. 그런데

(가) $g(0)=4 \Leftrightarrow y=f(x)$의 그래프가 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$을 지난다.

$$\Leftrightarrow f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

이므로 (가), (나)의 조건은 $f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$, $f'(2\sqrt{2})=1$를 의미한다.

삼차함수는 항상 변곡점에 대하여 대칭이다. $y=f(x)$의 그래프를 원점을 중심으로 45° 회전시켰을 때, 어떤 함수 $g(x)$의 그래프가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $(0, 4)$가 $y=g(x)$의 그래프의 변곡점이 되어야 한다.

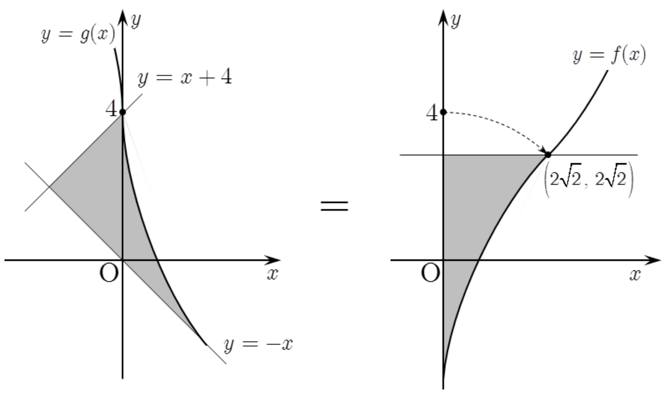


이제 원점을 중심으로 -45° 만큼 회전시켜 $y=f(x)$의 그래프를 유추하면 삼차함수 $f(x)$의 변곡점이 $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$이고 그 점에서의 접선의 기울기가 1임을 알 수 있다.

$f''(x)=24(x-2\sqrt{2})$

$f'(x)=12(x-2\sqrt{2})^2+1 \ (\because f'(2\sqrt{2})=1)$

$f(x)=4(x-2\sqrt{2})^3+x \ (\because f(2\sqrt{2})=2\sqrt{2})$



위 그림에서 구하고자 하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{2\sqrt{2}}\{2\sqrt{2}-f(x)\}dx=\int_0^{2\sqrt{2}}\{(2\sqrt{2}-x)-4(x-2\sqrt{2})^3\}dx$$

$$=\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(-t-4t^3)dt=-\frac{1}{2}(0-8)-(0-64)=68$$