

2015학년도 카이독 수능 대비 직전 모의고사

수학 영역 (B형)

성명	
----	--

수험번호						-			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하십시오.

점수보다 등급이 더 높네

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(B형)

제 2교시

홀수형

5 지 선 다 형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $3A$ 의 모든 성분의 합이 12일 때, a 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos 4\theta$ 의 값은? [2점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

3. 좌표공간의 점 $A(a, b, c)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 할 때, 선분 AB 를 3:1로 외분하는 점의 좌표가 $(2, 2, 2)$ 이다. $a+b+c$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4. 무리방정식 $x^2 - 2(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + x) = 0$

의 모든 실근의 곱을 구하면? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$f(\ln x) = x^2 + g\left(\frac{e}{x}\right)$$

를 만족시킨다. $f'(1) = g'(1) = k$ 일 때, k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e}{4}$ ② $\frac{e}{2}$ ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

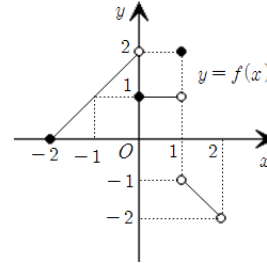
6. 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르고

$$E(X) = 6, \quad E(X^2) = V(3X+1)$$

를 만족시킨다. n 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

7. 구간 $[-2, 2]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 를 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow -12+0} (f \circ f \circ f)(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 원 $C : (x-a)^2 + (y-a)^2 = 36 (a > 6)$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환 f 에 의하여 점 P 가 원 C 위의 다른 한 점으로 옮겨질 때, 이를 만족시키는 θ 의 최댓값이 $\frac{\pi}{3}$ 이다. a 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]

- ① $6\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $30\sqrt{2}$

9. 2보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(x+x^2+\dots+x^n)(x+1)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수가 63일 때, x^2 의 계수는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 방정식

$$3\sin x = 4\cos x + n$$

의 실근 x 의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11. 어느 학교에서 도보를 통해 등교를 하는 학생들의 비율을 알아보기 위하여 이 학교의 학생 중 100명을 임의 추출하여 조사한 결과 20명이 도보를 통해 등교를 한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 학교 학생 전체의 도보를 통해 등교를 하는 학생의 비율에 대한 신뢰도 $x\%$ 의 신뢰구간이 $[a, b]$ 이다. $b = 3a$ 일 때, x 의 값을 오른쪽의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

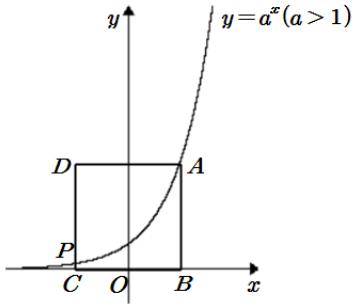
- ① 68 ② 77 ③ 86 ④ 96 ⑤ 98

12. 구 $S_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ 위의 점 $(2, 2, 2)$ 에서 구 S_1 과 접하는 평면 α 가 구 $S_2 : (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-9)^2 = r^2$ 와도 접할 때, r 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[13~14] 그림은 $y = a^x (a > 1)$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 곡선 $y = a^x$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A 에 대하여 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 하자. x 축의 음의 방향 위에 점 C 를 잡고, 제 2사분면에 점 D 를 잡을 때, 곡선 $y = a^x$ 와 직선 CD 와의 교점을 P 라 하자. 사각형 $ABCD$ 는 정사각형이다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $a = 2$ 이고, 직선 AP 의 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이다. 삼각형 ADP 의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ $\frac{9}{2}$

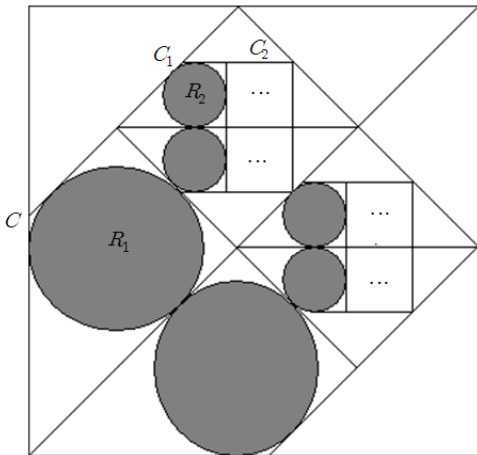
14. 곡선 $y = a^x$ 와 x 축, y 축 및 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하고, 곡선 $y = a^x$ 와 x 축, y 축 및 직선 CD 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $\overline{OB} = \overline{OC}$ 일 때, $S_1 S_2 = k(S_1 - S_2)$ 를 만족시키는 실수 k 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{e^2}$
- ② $\frac{2}{e}$
- ③ $\frac{e}{2}$
- ④ $2e$
- ⑤ e^2

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 C 에 대하여 정사각형 C 의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C 의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C 위에 있도록 정사각형 C_1 을 두 개 그릴 때, 정사각형 C 의 한 변과 정사각형 C_1 의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_1 이라 하자.

두 정사각형 C_1 의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C_1 의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C_1 위에 있도록 정사각형 C_2 를 두 개 그릴 때, 정사각형 C_1 의 한 변과 정사각형 C_2 의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 그려진 원 R_n 의 둘레의 길이의 합을 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{2}+1}{3}\pi$ ② $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$ ③ $(\sqrt{2}+1)\pi$
- ④ $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$

16. 분수부등식 $\frac{(x-1)^2(x-a)}{x+b+c+d} < 0$ 의 정수인 해의 개수가 6이 되도록 하는 자연수 a, b, c, d 에 대하여 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

- ① 50 ② 45 ③ 40 ④ 35 ⑤ 30

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} = 6n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + na_n = 6(n-1)^2 \quad (n \geq 2)$$

이므로 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)a_{n+1} = \boxed{\text{(가)}} \times a_n + 12n - 6$$

이다. $b_n = n(n-1)a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이고, $b_2 = 6$ 이므로

$$b_n = n(n-1) \times \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \boxed{\text{(다)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라

할 때, $\frac{g(10)}{f(6) \times h(6)}$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

18. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB = A - E, \quad (B^2 - B)^2 + E = O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

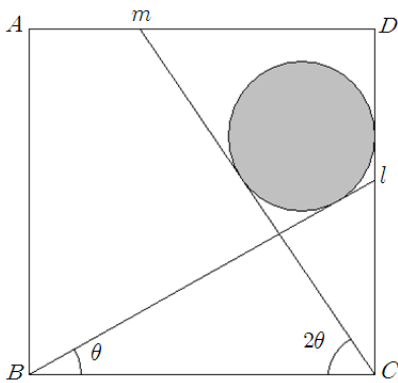
< 보기 >

- ㄱ. $AB = BA$
 ㄴ. $A^2 = -B^2$
 ㄷ. 임의의 실수 t 에 대하여 $A + tB$ 의 역행렬이 항상 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$ 에 대하여
 각각 점 B, C 를 지나는 두 직선 l, m 이 선분 BC 와 이루는 각의
 크기가 각각 $\theta, 2\theta(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$ 이다. 두 직선 l, m 과 직선 CD 에
 모두 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$ 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ③ 1
- ④ $\sqrt{2}$
- ⑤ 2

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수
 $f(x)$ 에 대하여 그 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(x)$ 는 증가함수이고,
 모든 실수 x 에 대하여

$$ax + \int_1^x g(t)dt = a + \int_0^{g(x)} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(a) + g(a) = 8$ 일 때, $f(a^2) + g(a^2)$ 의 값은?

(단, a 는 $a > 0$ 인 상수이다.) [4점]

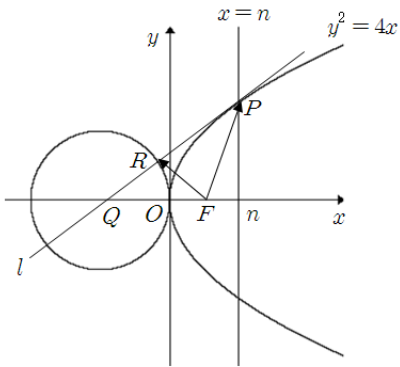
- ① 28
- ② 30
- ③ 32
- ④ 34
- ⑤ 36

21. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 와 직선 $x = n$ 과의 교점 중

제 1사분면 위에 있는 점을 P 이라 하자. 점 P 에서의 포물선에 접하는 직선 l 이 x 축과 만나는 교점을 Q 이라 할 때, 점 Q 을 중심으로 하고 선분 OQ 을 반지름으로 하는 원과 직선 l 과의 교점 중 제 2사분면에 있는 점을 R 이라 하자. 포물선의 초점을 F 라 할 때, 두 벡터 \overrightarrow{FP} , \overrightarrow{FR} 에 대하여 함수 $f(n)$ 를

$$f(n) = (\text{내적 } \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FR} \text{의 값})$$

이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

단 답 형

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(100x-99) + x^2 - 1}{x-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f 에 의하여 점 $(3, 5)$ 가 점 $(1, 2)$ 로 옮겨지고, 일차변환 f 의 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 점 $(-3, -5)$ 가 점 $(0, 1)$ 로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의하여 점 (a, b) 가 점 $(3, 5)$ 로 옮겨질 때, $b-a$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 어느 데이터 샘플에서 데이터 샘플에 있는 항목의 첫째 숫자가 n ($n=1, 2, 3, \dots, 9$)일 확률을 p_n 이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$p_n = k\{\log_{10}(n+1) - \log_{10}n\} \quad (\text{단, } k \text{는 상수이다.})$$

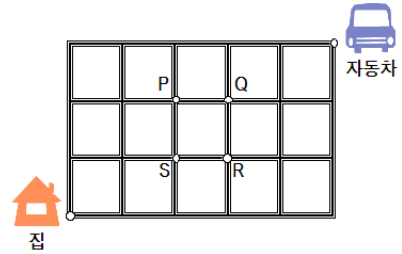
이 때, 10^{k+p_2} 의 값을 구하시오. (단, 데이터 샘플에 있는 항목에는 오류가 존재하지 않는다.) [3점]

25. 방정식

$$x^2 - 2kx + 9 = 0$$

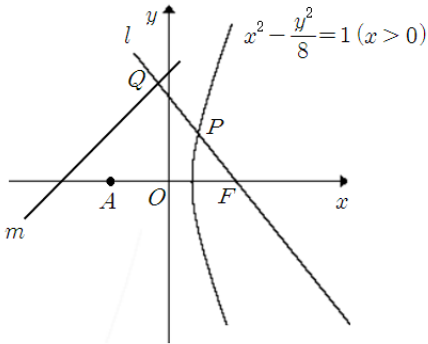
의 두 근을 α, β 라 하자. 세 수 $\frac{1}{\alpha}, k, 4\beta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 도둑은 왼쪽 하단의 집에서 출발하여 한번 움직일 때 마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 처음 P 지점에서 순찰을 돌고 있는 경찰은 도둑이 움직인 후 멈출 때 마다 길새를 느끼고 $\langle P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow \dots \rangle$ 의 경로를 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 예를 들어, 처음 도둑이 네 번 움직일 동안, 경찰은 순찰을 한 바퀴 돌고 다시 P 지점으로 돌아오게 된다. 도둑이 범행을 저지른 집에서 출발하여 경찰을 따돌릴 수 있는 우측 상단의 자동차까지 경찰에 잡히지 않고 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, 도둑은 경찰이 정지했을 때만 이동할 수 있고, 도둑과 경찰의 위치가 같을 때를 도둑이 잡힌 경우로 본다.) [4점]

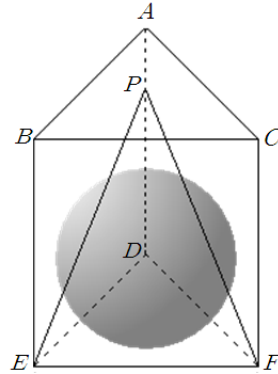


27. 점 $F(3, 0)$ 를 지나는 직선 l 과 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x > 0)$

과의 교점을 P 라 하자. 선분 FP 를 2:1로 외분하는 직선 l 위의 점 Q 에서 그은 직선 l 의 수선을 m 이라 하자. 점 $A(-3, 0)$ 에 대하여 점 A 와 직선 m 사이의 거리가 2이다. $\overline{FQ} = k$ 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오. (단, 직선 l 의 기울기는 음수이고, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이다.) [4점]



28. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형을 밑변으로 하고 높이가 3인 정삼각기둥 $ABC-DEF$ 와 면 ABC 를 제외한 정삼각기둥의 모든 면에 내접하는 구가 있다. 선분 AD 위를 움직이는 점 P 에 대하여 면 PEF 에 의해 잘린 구의 단면을 면 DEF 에 내린 정사영의 넓이의 최댓값이 $\frac{q\sqrt{3}}{p}\pi$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

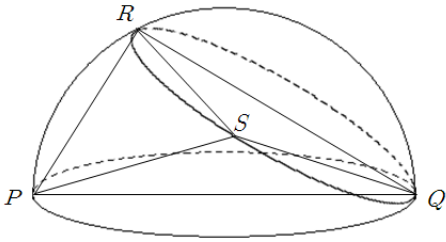


29. 최고차항의 계수가 1이고 $f''(2) > 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(x) = |f(x)|$ 라 하자. 모든 실수 t 에 대하여 함수 $|g(x) - t|$ 의 미분불가능한 점의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, 함수 $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $h(8) = 2$
- (나) $\lim_{t \rightarrow \infty} (f \circ h)(t) = 0$

$f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 길이가 2인 선분 PQ 를 지름으로 하고 평면 α 위에 있는 원 C_1 을 밑면으로 하는 반구가 있다. 원 C_1 위의 점들 중 점 Q 만을 지나는 평면 β 에 의해 반구가 잘린 단면인 원을 C_2 라 할 때, 점 Q 와 원 C_2 의 중심을 잇는 선분의 연장선과 원 C_2 와의 교점 중 점 Q 가 아닌 점을 R 이라 하자. 세 점 P, Q, R 과 원 C_2 위의 점 S 가 다음 조건을 만족시킨다.



- (가) 평면 PRQ 와 평면 PRS 가 이루는 각의 크기와 평면 PSQ 와 평면 RSQ 가 이루는 각의 크기가 같다.
- (나) 사면체 $PQRS$ 의 부피가 $\frac{1}{4}$ 이다.

평면 α 와 평면 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $120 \cos^2 \theta$ 의 값을 구하시오. (단, 점 S 는 점 Q, R 과 다른 점이다.) [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.