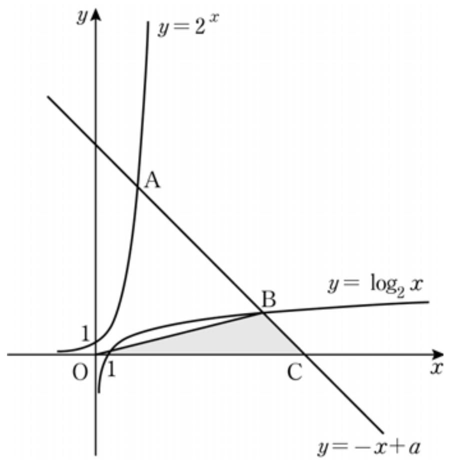
18. 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 할 때, 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$
(나) 삼각형 OBC의 넓이는 40이다.

점 A의 좌표를 A$(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은?
(단, O는 원점이고, a는 상수이다.) [4점]



① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

21. 수열 $\{a_n\}$은 15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 모두 나열하여 만든 것이다. 예를 들면 $a_2=2$, $a_4=7$이다. $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

① 240 ② 280 ③ 320 ④ 360 ⑤ 400

28. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \\ |x|+|y| \ge \dfrac{1}{n} \end{cases} \quad (n \ge 1)$$

의 해 $(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\dfrac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_n S_{n+2}}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. $\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6일 때, 모든 자연수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

30. 집합 $U=\{x \mid x$는 30 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{15}\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 임의의 두 원소 $a_i,\ a_j(i \neq j)$에 대하여 $a_i+a_j \neq 31$

(나) $\sum_{i=1}^{15} a_i = 264$

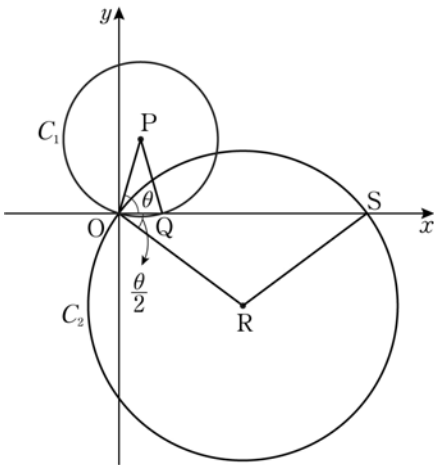
$\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2$의 값을 구하시오. [4점]

집중분석

20. 그림과 같이 $\overline{OP}=1$인 제1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{OR}=2$이고 $\angle ROQ=\frac{1}{2}\angle POQ$인 제4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자.

$\angle POQ=\theta$라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은?

(단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

3월 교육청 : B형 응시자도 풀어야 하는 A형 문항 **정답 및 해설**

1) [정답] ③
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$이라 하면 점 $\mathrm{D}(0,\ a)$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$에서

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{5}\triangle\mathrm{OCD}=\dfrac{1}{10}a^2=40$이므로 $a=20$

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$이므로 점 $\mathrm{B}(q,\ p)$이고, 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$이다.

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$q=\dfrac{3a+p}{4}$, $p=\dfrac{q}{4}$에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\dfrac{1}{2}ap=\dfrac{5}{2}p^2=40$

$p^2=16$에서 $p=4$이므로 $a=20$

($p<0$인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

2) [정답] ①
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.

$1\le n\le 15$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16\le n\le 30$을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1\le n\le 15k$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1,2,3,\cdots$)

a_{16}은 $16\le n\le 30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{16}a_n$은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{30}n-\sum_{n=1}^{10}3n-\sum_{n=1}^{6}5n+\sum_{n=1}^{2}15n$

$=240$

[다른 풀이]

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$이고

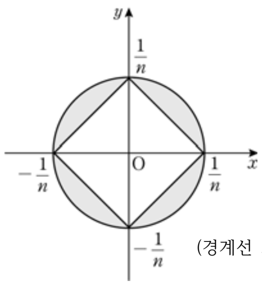
$k(k=1,2,3,\cdots,14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=1+2+4+7+8+11+13+14=60$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16}a_n&=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{16}a_n\\&=2\sum_{n=1}^{8}a_n+15\times 8\\&=2\times 60+120\\&=240\end{aligned}$$

3) [정답] 15
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 연립부등식의 영역으로 주어진 도형과 관련된 무한급수의 문제를 해결한다.



(경계선 포함)

$S_n=\pi\left(\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot 2=\dfrac{\pi-2}{n^2}$이므로

$S_{n+2}=\dfrac{\pi-2}{(n+2)^2}$

$$\begin{aligned}&\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_nS_{n+2}}\\&=\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi-2}{n^2}\cdot\frac{\pi-2}{(n+2)^2}}\\&=20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\\&=20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=10\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=10\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&=15\end{aligned}$$

4) [정답] 30
[풀이] [2014년 3월 교육청]
[출제의도] 로그의 정의와 이차함수의 성질을 활용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=-x^2+ax+4$라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x)>0$

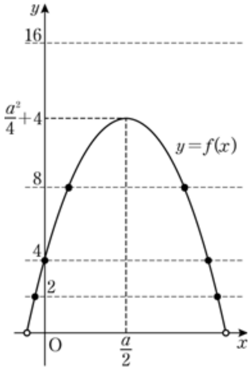
$$\begin{aligned}f(x)&=-x^2+ax+4\\&=-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+4\\&=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4\end{aligned}$$

$\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ $(n\ge 4)$와는 만나지 않는다.

즉, $2^3<\dfrac{a^2}{4}+4<2^4$

$16<a^2<48$이고, a가 자연수이므로 $a=5$, 6

따라서 $5\times 6=30$



5) [정답] 184

[풀이] [2014년 3월 교육청]

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i(1 \le i \le 15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2+\sum_{i=1}^{15}31^2-62\sum_{i=1}^{15}a_i+\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{30\times31\times61}{6}$$

조건 (나)에 의해

$$2\sum_{i=1}^{15}a_i^2+15\times31^2-62\times264=5\times31\times61$$

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{2}(5\times31\times61-15\times31^2+62\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(5\times61-15\times31+2\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(-5\times32+2\times264)$$

$$=31\times184$$

따라서 $\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2=184$

[참고]

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 $(1,\ 30)$, $(2,\ 29)$, $\cdots$, $(15,\ 16)$이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 찾은 집합 A의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.

$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$

---

6) [정답] ⑤

[풀이] [2014년 3월 교육청]

[출제의도] 미분법을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값 구하는 문제를 해결한다.

점 P의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로

삼각형 OQP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

점 R의 좌표는 $\left(2\cos\frac{1}{2}\theta,\ -2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$이므로

삼각형 ORS의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\cos\frac{1}{2}\theta\times2\sin\frac{1}{2}\theta=4\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

$$=2\sin\theta$$

따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta+2\sin\theta$$

$$f'(\theta)=\cos2\theta+2\cos\theta$$

$$=2\cos^2\theta+2\cos\theta-1$$

이므로

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$f'(\theta)=0$인 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

$f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	$f(\theta_1)$	↘	

그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여$\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다.