1. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오.〔4점〕

〔2022학년도 대수능 21번〕

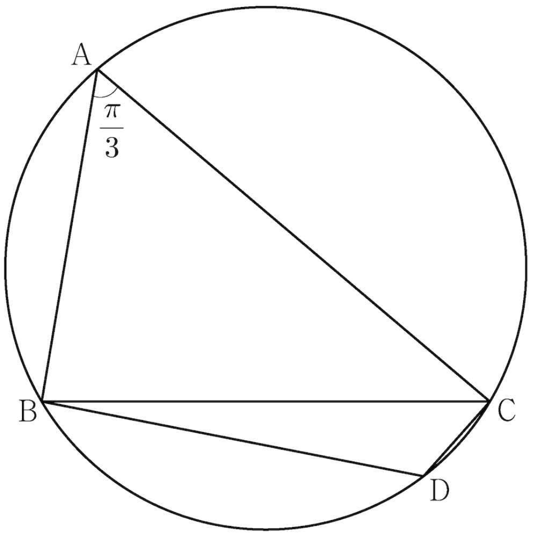
〈선정 이유〉

어렵지 않은 수열의 합과 관련한 문제이지만,
절댓값이 등장하고 낯선 표현들을 만나면 충분히 풀 수 있는
문제를 지레 겁먹지 말도록 미리 연습하길 바람

2. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? 〔4점〕

〔2022학년도 9월 12번〕

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



〈선정 이유〉

사인, 코사인 법칙을 이용한 삼각함수 도형 문제는
많이 접해볼수록 잘 풀리기 때문에
3월을 보기 전에 가볍게 도형분석과 내용을 정리하고
들어갔으면 함

3. 함수 $f(x)=x^3+(a+4)x^2+(4a+6)x+4a+5$의 그래프가 a값의 관계없이 항상 지나는 점을 P라고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 실수이다.)

〔2024학년도 수능특강 p.54 2번〕

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ 5 ⑤ $\frac{25}{4}$

〈선정 이유〉

a값의 관계없이 조건, 접선의 방정식 등 난이도가 어렵지 않음에도 여러가지를 동시에 생각해볼 수 있는 문항임

4. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치는 각각 $x_1(t)=t^3+at^2+5t$, $x_2(t)=t^2+bt+c$이다.
두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하고,
두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 할 때, 다음 조건이 성립한다.

(가) 두 점 P, Q가 시각 $t=\alpha\,(\alpha>0)$에서 만나고
$v_1(\alpha)=v_2(\alpha)$, $a_1(\alpha)=a_2(\alpha)$이다.
(나) $a_1(4)-a_2(4)=12$

$x_1(\alpha)+x_2(\alpha+1)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

〔2024학년도 수능특강 p.70 3번〕

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

〈선정 이유〉

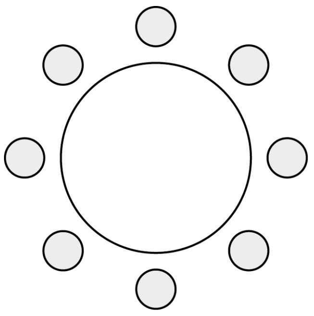
최근 출제 경향에서 미분 파트 문제가 속도, 가속도 파트와 연관되어 함수의 정확한 개형을 판단하는 문제가 나오고 있어서 최근 수능 경향과 가장 비슷하다는 생각이 듦

5. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) 〔3점〕

〔2021년 3월 고3 확률과 통계 25번〕

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108



〈선정 이유〉

3월 학력평가에서 원순열이 자주 등장했기 때문에 한 번쯤 풀어보고 가면 좋을 것 같아서 선정함

6. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.(단, 같은 색 모자끼리 서로 구별하지 않는다.) 〔4점〕

〔2021학년도 대수능 가형 29번〕

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4이상이다.
(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

〈선정 이유〉

중복조합관련 문항은 조합파트에서 가장 자주 출제되는 내용이기 때문에 중복조합과 관련한 문항을 선정함

7. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이

극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식

$f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는

서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

〔2021년 3월 고3 30번〕

〈선정 이유〉

학력평가 전에 다항함수의 여러가지 성질을 연습하길 바람

8. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\quad (k>0)$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? [4점] [2019년 4월 나형 21]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

〈선정 이유〉

등비수열의 극한으로 정의된 함수와 관련한 문항은 처음 보기에는 낯설고 어려울 수 있는 문항이지만 연습을 해보면 접근 방식이 단순하다는 것을 느낄 수 있을 것으로 생각함

9. 초점이 F 인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 FH가 포물선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은? [3점] [2022년 3월 27번]

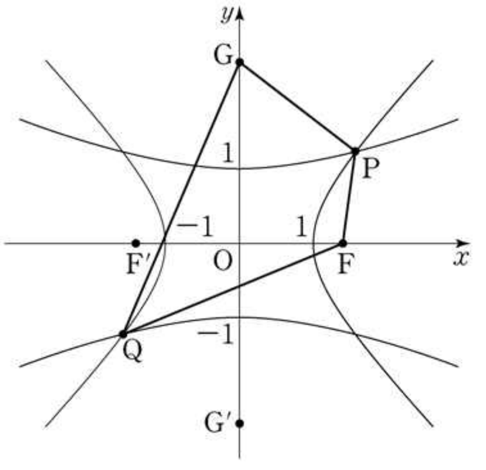
(가) 점 Q는 선분 FH를 $1:2$로 내분한다.
(나) 삼각형 PQF의 넓이는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

〈선정 이유〉

포물선의 성질과 길이의 비를 통한 각 추론
이차곡선의 성질에서 위와 같은 유형의 문제가 자주 출제되며
난이도가 높진 않지만 이차곡선의 성질을 정확히 모른다면
헤맬 수도 있는 문항임

10. 그림과 같이 초점이 각각 F, F′과 G, G′이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 P, 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PG}\times\overline{QG}=8$, $\overline{PF}\times\overline{QF}=4$일 때, 사각형 PGQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표와 점 G의 y좌표는 양수이다.)
[4점] [2016학년도 6월 수학 B형 19번]



① $6+2\sqrt{2}$ ② $6+2\sqrt{3}$ ③ 10
④ $6+2\sqrt{5}$ ⑤ $6+2\sqrt{6}$

〈선정 이유〉

쌍곡선의 성질과 대칭성을 통한 길이 추론
8번 문항과 마찬가지 이유

1. a_1, $\cdots$, a_{10}중에 양수인 항들의 합을 x
음수인 항들의 합을 y라 할 때,
$x-y=2+4+8+\cdots+1024=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2=2046$
$\sum_{n=1}^{10} a_n=x+y=-14$
$\begin{cases} x+y=-14 \\ x-y=2046 \end{cases}$을 연립하면 , $x=1016$, $y=-1030$
$1016=512+256+128+64+32+16+8$
$=2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3$
$=a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3$
$1030=1024+4+2=2^{10}+2^2+2^1=-(a_{10}+a_2+a_1)$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2+8+32+128+512=678$
$\therefore$ $50S=192$

2. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로
사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})}=4\sqrt{7}$
즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\sin\frac{\pi}{3}\times 4\sqrt{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$
또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$
즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\sin(\angle \mathrm{BCD})\times 4\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times 4\sqrt{7}=8$
한편, $\angle \mathrm{BDC}=\pi-\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이므로
$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여
$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times 8\times\cos\frac{2}{3}\pi$
$x^2+8x-20=0$
$(x-2)(x+10)=0$
$x>0$이므로 $x=2$
즉, $\overline{\mathrm{CD}}=2$
따라서 $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=8+2=10$

3. $f(x)=x^3+(a+4)x^2+(4a+6)x+4a+5$
$=(x^2+4x+4)a+x^3+4x^2+6x+5$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 x좌표는 $x^2+4x+4=(x+2)^2=0$에서 $x=-2$이고
이때 y좌표는 $(-2)^3+4\times(-2)^2+6\times(-2)+5=1$
즉, $\mathrm{P}(-2,\ 1)$
또한 $f'(x)=3x^2+2(a+4)x+4a+6$이고 $f'(-2)=2$이므로
점 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y-1=2(x+2)$
즉 $y=2x+5$
따라서 직선 $y=2x+5$의 x절편과 y절편은 각각 $-\frac{5}{2}$, 5
이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5=\frac{25}{4}$

4. 조건 (가)에서 $x_1(\alpha)-x_2(\alpha)=0$, $v_1(\alpha)-v_2(\alpha)=0$이므로
$x_1(t)-x_2(t)=(t-\alpha)^2(t-\beta)$ (α, β는 상수) $\cdots$ ㉠
로 놓을 수 있다.
㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면
$v_1(t)-v_2(t)=2(t-\alpha)(t-\beta)+(t-\alpha)^2$ $\cdots$ ㉡
㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면
$a_1(t)-a_2(t)=2(t-\beta)+4(t-\alpha)$
조건 (가)에서 $a_1(\alpha)-a_2(\alpha)=0$이므로
$2(\alpha-\beta)+4(\alpha-\alpha)=0$
$\therefore$ $\alpha-\beta=0$
따라서 $\alpha=\beta$이므로 $a_1(t)-a_2(t)=6(t-\alpha)$
조건 (나)에서 $a_1(t)-a_2(t)=6(t-\alpha)=12$이므로
$4-\alpha=2$, $\alpha=2$
㉠에서 $x_1(t)-x_2(t)=(t-2)^3=t^3-6t^2+12t-8$
$a=-5$, $b=-7$, $c=8$
따라서 $x_1(t)=t^3-5t^2+5t$, $x_2(t)=t^2-7t+8$이므로
$x_1(\alpha)+x_2(\alpha+1)=x_1(2)+x_2(3)=-6$

5. 같은 학급의 대표 2명을 한 사람으로 보고 4명을 배열하는 원순열의 수는 $(4-1)!=3!=6$이다.
각 학급 대표 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 $2^4=16$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times 16=96$

6. (ⅰ) A가 받는 검은색 모자의 개수가 5일 때
B,C,D중 한명은 검은색 모자를 받고 흰색 모자를 받지 않는다.
검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3
A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y, z라 하면
$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y\ge 1$, $z\ge 1$ 이므로 구하는 경우의 수는 $3\times{}_3\mathrm{H}_4=45$
(ⅱ) A가 받는 검은색 모자의 개수가 4일 때
(ⅱ-1) B,C,D중 한 명이 남은 검은색 모자를 2개 받으면 검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3
이 사람이 받은 흰색 모자의 수는 0 또는 1
(ⅱ-1-1) 이 사람이 받은 흰색 모자의 수가 0일 때
A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y, z라 하면
$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y\ge 1$, $z\ge 1$ 이므로
구하는 경우의 수는 $(x,\ y,\ z)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$인데 이중 $x=4$, 즉 A가 흰색 모자를 4개 받는 경우의 수가 1이므로 $3\times({}_3\mathrm{H}_4-1)=42$
(ⅱ-1-2) 이 사람이 받은 흰색 모자의 수가 1일 때
A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 남은 두 사람이 받은 흰색 모자의 개수를 y, z라 하면
$x+y+z=5$이고 $y\ge 1$, $z\ge 1$ 이므로 구하는 경우의 수는 $3\times{}_3\mathrm{H}_3=30$
(ⅱ-2) B,C,D중 두 명이 검은색 모자를 1개씩 받으면
검은 모자를 받을 사람을 선택하는 경우의 수는 3
두 사람 중 한 사람이 받은 흰색 모자의 수는 0이고 이 사람을 선택하는 경우의 수는 2이다.
다른 검은 모자를 받은 사람은 흰색 모자를 1개 이상 받아야 한다.A가 받은 흰색 모자의 개수를 x, 흰색 모자를 받을 두 사람이 받을 흰색 모자의 개수를 y, z라 하면
$x+y+z=6$이고 $x<6$, $y\ge 1$, $z\ge 1$ 이므로
구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$인데 이중 $x=4$, 즉 A가 흰색

모자를 4개 받는 경우의 수가 1이므로

$3\times2\times({}_3\mathrm{H}_4-1)=84$

이상에서 모든 경우의 수는

$45+42+30+84=201$

7. $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$

$=x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$

$f'(x)=0$ 에서

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

또는 $x=\dfrac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$$

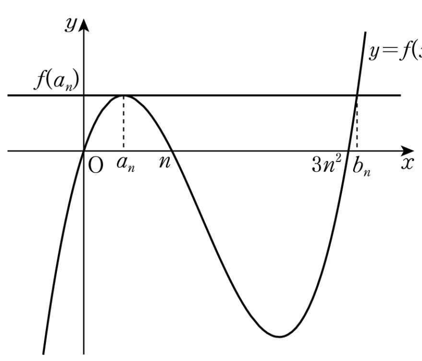
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2b_n$에서

$a_n^2b_n=a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3a_n$

양변을 n^3a_n으로 나누면

$\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{3n^2+n}{n^2}\times\frac{a_n}{n}+3\right\}$$

$$=0-3\times\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

$p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$

8. $\left|\dfrac{x-1}{k}\right|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=0$이므로

$1-k<x<1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|>1$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=\infty$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}=0$이므로

$x<1-k$ 또는 $x>1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|=1$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=1$이므로

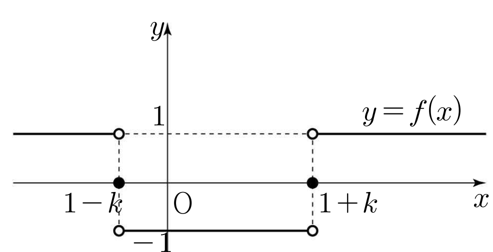
$x=1-k$ 또는 $x=1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1-k \text{ 또는 } x>1+k)\\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k)\\ -1 & (1-k<x<1+k)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to k}g(x)=g(k)$가 성립한다.



$\displaystyle\lim_{x\to k}g(x)=\lim_{x\to k}(x-k)^2=0$, $g(k)=(f\circ f)(k)$이므로

$(f\circ f)(k)=0$

$f(1-k)=f(1+k)=0$이므로

$f(k)=1-k$ 또는 $f(k)=1+k$

$k>0$, $1+k>1$이고

$f(x)$의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로

$1+k$는 치역에 속하지 않는다.

$\therefore\ f(k)=1-k$

(i) $1-k=1$인 경우

$k=0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $1-k=0$인 경우

$k=1$이므로

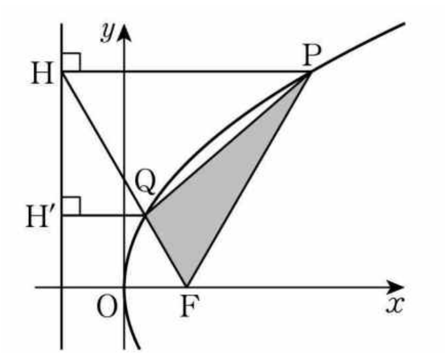
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2) \\ -1 & (0<x<2) \end{cases}$$

$f(f(1))=f(-1)=1\neq0$이므로
조건에 맞지 않는다.
(ⅲ) $1-k=-1$인 경우
$k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \\ -1 & (-1<x<3) \end{cases}$$

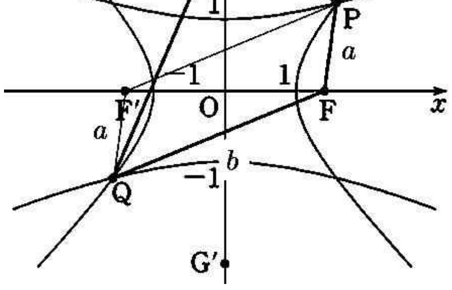
$f(f(2))=f(-1)=0$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $k=2$
$(g\circ f)(k)=g(f(2))=g(-1)=(-1-2)^2=9$

9.



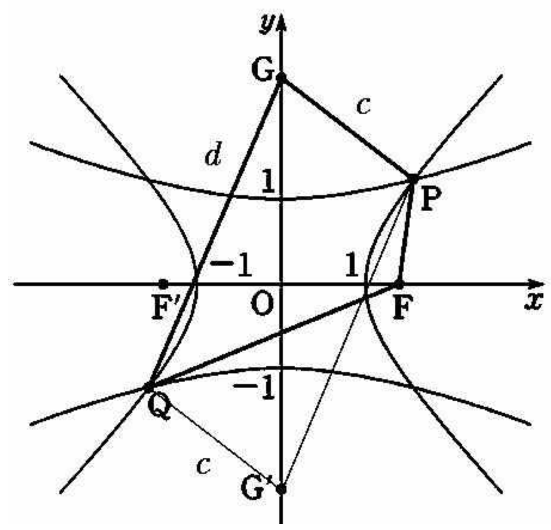
점 Q에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
점 Q는 포물선 위의 점이므로 $\overline{QF}=\overline{QH'}$
조건 (가)에서 $\overline{QF}:\overline{QH}=1:2$이므로
$\cos(\angle HFO)=\cos(\angle HQH')=\dfrac{\overline{QH'}}{\overline{QH}}=\dfrac{1}{2}$
그러므로 $\angle HFO=60^\circ$
$\overline{PH}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{OF}$이므로 $\angle PHF=\angle HFO=60^\circ$
이때 삼각형 PHF는 $\overline{PF}=\overline{PH}$인 이등변삼각형이므로
$\angle PFH=\angle PHF=60^\circ$
$\angle FPH=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$이므로
삼각형 PHF는 정삼각형이다.
이때 초점 F의 좌표가 $(p,\,0)$이므로
$\overline{FH}=4p$
조건 (나)에서 삼각형 PQF의 넓이는 정삼각형 PHF의 넓이 $\dfrac{1}{3}$이므로
$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4p)^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $p^2=2$
따라서 $p>0$이므로 $p=\sqrt{2}$

10.



[그림 1]

〔그림 1〕과 같이 $\overline{PF}=a$, $\overline{QF}=b$라 하면
점 F와 점 F′, 점 P와 점 Q는 각각 원점에 대해 대칭이므로
$\overline{PF}=\overline{QF'}$이고 $\overline{PF}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{QF'}$이므로
□PFQF′은 평행사변형이다.
따라서 $\overline{PF}=\overline{QF'}=a$이고
쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{QF}-\overline{QF'}=b-a=2$ ……㉠
이다.
주어진 조건에 의해
$\overline{PF}\times\overline{QF}=\overline{QF'}\times\overline{QF}=ab=4$ ……㉡
이므로
㉠, ㉡을 연립하면
$a=\sqrt{5}-1$, $b=\sqrt{5}+1$이다.



[그림 2]

〔그림 2〕와 같이 $\overline{PG}=c$, $\overline{QG}=d$라 하면
점 G와 점 G′, 점 P와 점 Q는 각각 원점에 대해 대칭이므로
$\overline{PG}=\overline{QG'}$이고 $\overline{PG}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{QG'}$이므로
□PGQG′은 평행사변형이다.
따라서 $\overline{PG}=\overline{QG'}=c$이고
쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{QG}-\overline{QG'}=d-c=2$ ……㉢
이다.
주어진 조건에 의해
$\overline{PG}\times\overline{QG}=\overline{QG'}\times\overline{QG}=cd=8$ ……㉣
이므로
㉢, ㉣을 연립하면
$c=2$, $d=4$이다.
따라서 구하는 값은 $a+b+c+d=6+2\sqrt{5}$이다.