제 2 교시

수학 영역

1. $3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}} = 3^{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}} = 3^2 = 9$

2. 함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f(1)=1$ 이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

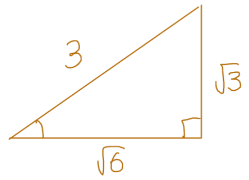
$f'(x)=4x-1$

$\therefore f'(1)=3$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

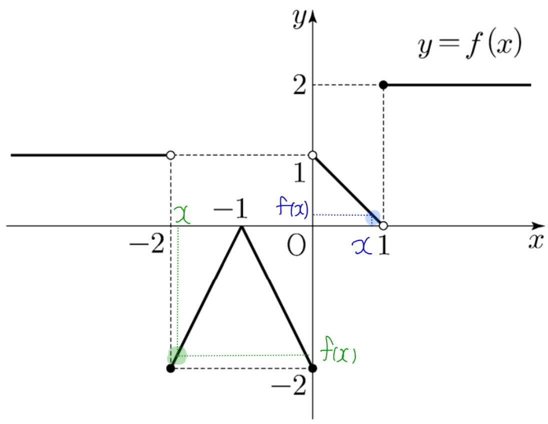
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\tan\theta < 0$ 이므로

$\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -2+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\lim_{x \to -2+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$

$= -2 + 0 = -2$

제 2 교시

수학 영역

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = 12,\ \ a_5 + a_7 = 36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72　② 78　③ 84
④ 90　⑤ 96

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\frac{a_3 \cancel{a_8}^{\,r^2}}{\cancel{a_6}} = a_3 r^2 = a_5 = 12$

$a_5 + a_7 = 12 + a_7 = 36$　$\times r^2 = 2$

$\therefore\ a_7 = 24$

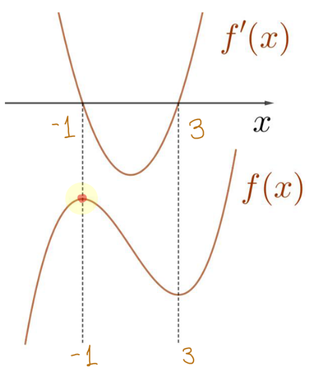
$\therefore\ r^2 = 2$

$\therefore\ a_{11} = a_7 r^4 = 24 \times 2^2$

6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$은 $x = -1$에서 극대이고, $x = 3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0　② 3　③ 6
④ 9　⑤ 12

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



$f'(x) = 3(x+1)(x-3) = 3x^2 - 6x - 9$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$\therefore\ f(-1) = 6$

7. 두 실수 a, b가

$$3a + 2b = \log_3 32,\ \ ab = \log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$　② $\frac{5}{6}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{25}{12}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} = \frac{3a+2b}{6ab} = \frac{\log_3 32}{6\log_9 2} = \frac{5\cancel{\log_3 2}}{3\cancel{\log_3 2}} = \frac{5}{3}$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 6x^2 - 2f(1)x,\ \ f(0) = 4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + C$

$\quad = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$ $(\because\ f(0) = C = 4)$

$\therefore\ f(1) = 2 - f(1) + 4$

$\therefore\ f(1) = 3$

$\therefore\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

$\therefore\ f(2) = 8$

제 2 교시

수학 영역

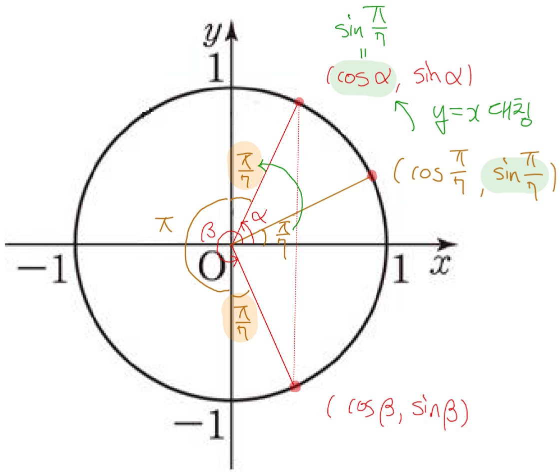
9. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$
④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

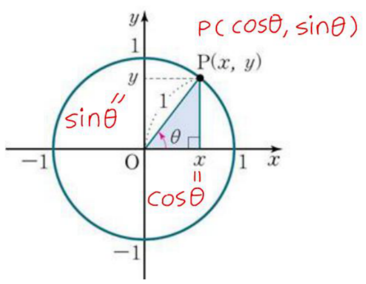
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



$\therefore \beta-\alpha=\pi+\frac{\pi}{7}\times 2=\frac{9}{7}\pi$

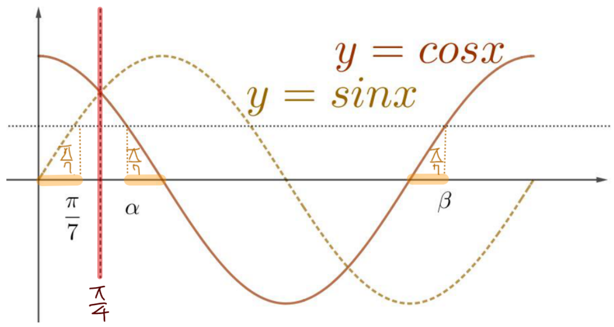
Analysis

단위원의 좌표와 삼각함수의 관계



[다른 풀이]

대칭성 활용!



$\therefore \beta-\alpha=\pi+\frac{\pi}{7}\times 2=\frac{9}{7}\pi$

Analysis

삼각함수의 그래프 문제 출제 point

① 대칭성
② 주기성
③ 최대최소

제 2 교시

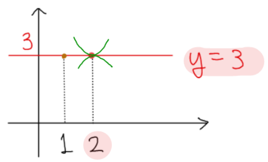
수학 영역

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 점 $(1,\ 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이
점 $(1,\ 3)$을 지나므로
함수 $f(x)$의 그래프는 $x=2$에서 $y=3$에 접한다.



$f(x)-3=(x-2)^2(x-a)$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x-a)+3$

$\therefore\ f'(x)=2(x-2)(x-a)+(x-2)^2$

점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$f'(-2)=\frac{f(-2)-3}{-2-1}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cdot(-2)(-2-a)+(-4)^2=\frac{(-2-2)^2(-2-a)}{-3}$$

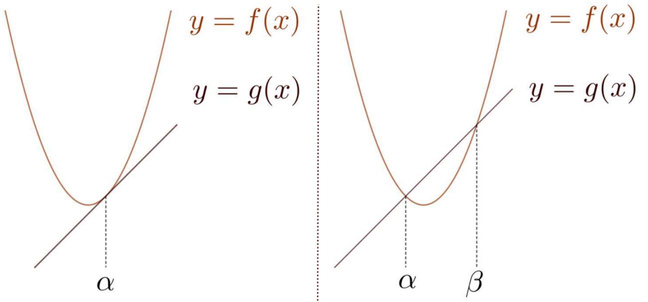
$\therefore\ a=-8$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$

$\therefore\ f(0)=35$

Analysis

접선으로 함수의 식을 구하기



$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)^2p(x)$

$f(x)$
$=(x-\alpha)^2p(x)+g(x)$

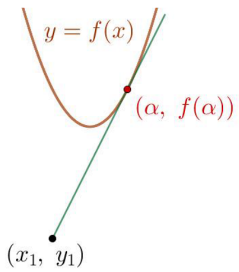
$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)$

$f(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)+g(x)$

Analysis

외부의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때 접점이 $(\alpha,\ f(\alpha))$라고 하면

$$f'(\alpha)=\frac{f(\alpha)-y_1}{\alpha-x_1}$$



※ 접선 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$에 $(x_1,\ y_1)$를 대입한 식과 동일하다.

제 2 교시

수학 영역

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

점 P의 위치를 $x_1(t)$,
점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자.

$$x_1(t)=1+\int_0^t(3t^2+4t-7)\,dt=t^3+2t^2-7t+1$$

$$x_2(t)=8+\int_0^t(2t+4)\,dt=t^2+4t+8$$

두 점 P, Q 사이의 거리가 4이므로
$|x_1(t)-x_2(t)|=4$
$\Leftrightarrow$ $|t^3+t^2-11t-7|=4$

i) $t^3+t^2-11t-7=4$일 때
$t^3+t^2-11t-11=0$
$\Leftrightarrow$ $(t+1)(t^2-11)=0$
$\therefore$ $t=\sqrt{11}$ $(t>0)$

ii) $t^3+t^2-11t-7=-4$일 때
$t^3+t^2-11t-3=0$
$\Leftrightarrow$ $(t-3)(t^2+4t+1)=0$
$\therefore$ $t=3$ $(t>0)$
두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 건
$t=3$일 때 $(\because\ 3<\sqrt{11})$

점 P가 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3|v_1(t)|\,dt=\int_0^3|3t^2+4t-7|\,dt$$

$$=-\int_0^1(3t^2+4t-7)\,dt+\int_1^3(3t^2+4t-7)\,dt$$

$$=-\Big[t^3+2t^2-7t\Big]_0^1+\Big[t^3+2t^2-7t\Big]_1^3=32$$

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

▸ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수로 구성된다.
(홀수 or 짝수)
▸ $a_2+a_4=40$가 단서로 나왔으면
→ a_3에 대해서 파악할 생각을 해야 한다!

a_2	a_2	a_3	a_4
i)홀수	a_2	a_2+1	$\frac{1}{2}(a_2+1)$
ii)4배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{4}a_2$
iii)4배X 2배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{2}a_2+1$

i) a_2가 홀수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\frac{1}{2}(a_2+1)=\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{2}=40$$

$\therefore$ $a_2=\frac{79}{3}$ (자연수가 아니므로 모순)

ii) a_2가 4배수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\frac{1}{4}a_2=\frac{5}{4}a_2=40$$

$\therefore$ $a_2=32$
$\therefore$ $a_1=31$ or 64

iii) a_2가 4배수가 아닌 짝수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\left(\frac{1}{2}a_2+1\right)=\frac{3}{2}a_2+1=40$$

$\therefore$ $a_2=26$
$\therefore$ $a_1=25$ or 52

모든 a_1의 값은 합은 $25+31+52+64=172$

제 2 교시

수학 영역

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

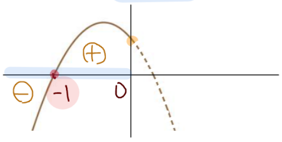
① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$
④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소
⇔ $f'(x)\leq 0$
함수 $f(x)$가 구간 $[-1, \infty)$에서 증가
⇔ $f'(x)\geq 0$

$$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x\leq 0) \\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

(step1) $x\leq 0$에서의 $f'(x)$



$x\leq 0$에서 $f'(x)=-x^2-2ax-b$는
$x<-1$에서 ⊖
$-1<x\leq 0$에서 ⊕
$\therefore f'(-1)=0$
⇔ $-1+2a-b=0$
$\therefore b=2a-1$

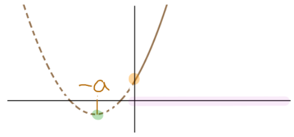
구하는 답 $a+b=a+(2a-1)=3a-1$이므로
a의 범위를 구하면 된다.

$f'(0)\geq 0$
⇔ $-b\geq 0$ ⇔ $b\leq 0$
$\therefore a\leq \frac{1}{2}$ ($\because b=2a-1$)

(step2) $x\geq 0$에서의 $f'(x)$

$x\geq 0$에서 $f'(x)=x^2+2ax-b\geq 0$
$y=x^2+2ax-b$의 꼭짓점의 x좌표는 $-a$

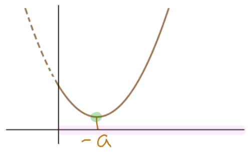
i) 꼭짓점 x좌표 $-a\leq 0$ ⇔ $a\geq 0$



$x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로
$f'(0)\geq 0$
⇔ $-b\geq 0$ ⇔ $b\leq 0$
$\therefore a\leq \frac{1}{2}$ ($\because b=2a-1$)

$\therefore 0\leq a\leq \frac{1}{2}$

ii) 꼭짓점 x좌표 $-a>0$ ⇔ $a<0$



$\frac{D}{4}=a^2+b=a^2+2a-1\leq 0$
⇔ $-1-\sqrt{2}\leq a\leq -1+\sqrt{2}$
$\therefore -1-\sqrt{2}\leq a<0$

$\therefore$ i , ii)에 의하여
$-1-\sqrt{2}\leq a\leq \frac{1}{2}$

$a+b=3a-1$의
최대 $M=\frac{1}{2}$ ($a=\frac{1}{2}$일 때)
최소 $m=-4-3\sqrt{2}$ ($a=-1-\sqrt{2}$일 때)
$\therefore M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

제 2 교시

수학 영역

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

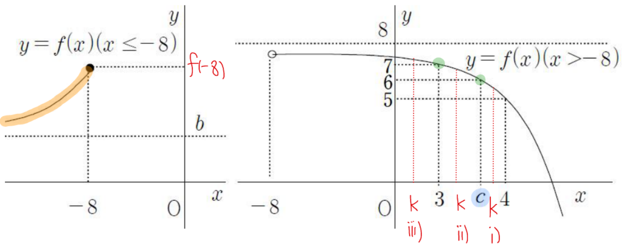
이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x)|x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

각 구간마다 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



문제 조건 $3\le k<4$에서

i) $c\le k<4$인 경우

$-8<x<k$에서 정수 $f(x)=6,\ 7$로 2개

$\therefore$ $x\le-8$에서 정수 $f(x)=6$ or 7 뿐이다.

$\therefore$ $x\le-8$에서 $5<f(x)<8$

$\therefore$ $b\ge5$

ii) $3\le k<c$인 경우

$-8<x<k$에서 정수 $f(x)=7$로 1개

$\therefore$ $x\le-8$에서 정수 $f(x)=6$이 반드시 존재해야 한다.

$\therefore$ $b=5,\ f(-8)\ge6$

iii) $k<3$인 경우

$x\le-8$에서 정수 $f(x)$는 2개 미만이어야 한다.

$\therefore$ $x\le-8$에서 $5<f(x)<7$

$\therefore$ $6\le f(-8)<7$

$\Leftrightarrow$ $6\le 2^{a-8}+5<7$

$\Leftrightarrow$ $1\le 2^{a-8}<2$

$\Leftrightarrow$ $0\le a-8<1$

$\therefore$ $a=8$ ($\because$ a는 자연수)

$\therefore$ $a+b=8+5=13$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\ne0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to3}g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\lim\limits_{x\to3}g(x)\ne g(3)$이므로

$g(x)$는 $x=3$에서 불연속

$g(x)$는 $f(x)=0$일 때 불연속 가능성 존재

$\therefore$ $f(3)=0$

$\lim\limits_{x\to3}g(x)=g(3)-1=3-1=2$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$

$\therefore$ $f(6)=0$ or $f(3)=-1$ ($\because$ $f(3)=0$)

$\therefore$ $f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\cancel{(x-3)}(x+a+3)\{f(x)+1\}}{\cancel{(x-3)}(x-6)(x+a)}$

$=\dfrac{3(a+6)\{f(3)+1\}}{-3(a+3)}$

$=-\dfrac{a+6}{a+3}$ ($\because$ $f(3)=0$)

$=2$

$\therefore$ $a=-4$

$\therefore$ $f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$\therefore$ $g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=20$

제 2 교시

수학 영역

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

6

진수조건에 의하여 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(x-1)^2$

$\Leftrightarrow$ $\log_4(x-1)^2=\log_4(13+2x)$

$\Leftrightarrow$ $(x-1)^2=13+2x$

$\Leftrightarrow$ $(x-6)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=6$ ($\because$ $x>1$)

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

24

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)$

$\displaystyle=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k.$

$\displaystyle=2\cdot 10-\sum_{k=1}^{10}b_k=34$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{10}b_k=-14$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=10-(-14)=24$

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

5

$f'(x)=(2x)(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

$f'(1)=2(4+a)+2(2+a)=4a+12=32$

$\therefore$ $a=5$

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

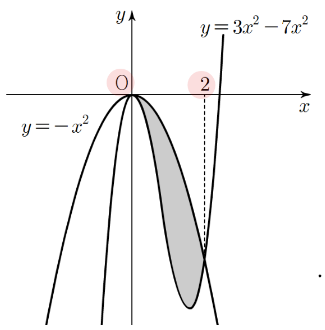
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

4

$3x^3-7x^2=-x^2$

$\Leftrightarrow$ $3x^3-6x^2=0$

$\therefore$ $x=0$ or 2

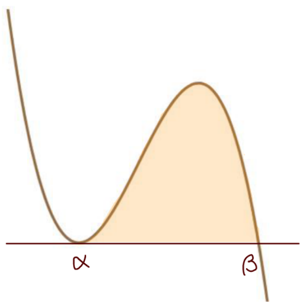


$$\int_0^2\{-x^2-(3x^3-7x^2)\}dx=\int_0^2(-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\frac{3}{12}\cdot 2^4=4$$

Analysis

넓이$=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$



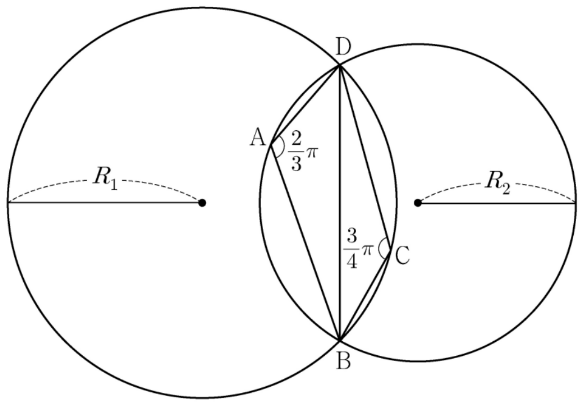
제 2 교시

수학 영역

20. 그림과 같이

$\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$R_2 = \boxed{(가)} \times \overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - (\boxed{(나)})$$

이므로

$$R_1 \times R_2 = \boxed{(다)}$$

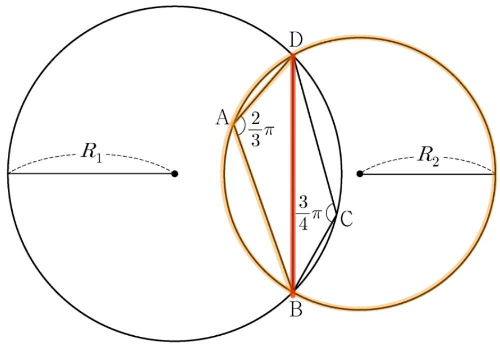
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9 \times (p \times q \times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

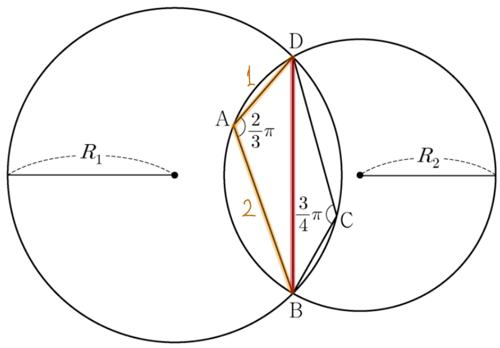
98



△ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = 2R_2$$

$$\therefore\ R_2 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \overline{BD}$$



△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= 2^2 + 1^2 - (\boxed{-2}) = 7$$

$$\therefore\ \overline{BD} = \sqrt{7}$$

$$\therefore\ R_1 \times R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{BD}^2 = \boxed{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$$

$$\therefore\ p = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q = -2,\ r = \frac{7}{6}\sqrt{6}$$

$$\therefore\ 9(pqr)^2 = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) \times \frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 98$$

제 2 교시

수학 영역

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

19

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)k\right\} = 644$$

$$= \frac{d}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{2}}\right) + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{8}}{\cancel{2}} = \cancel{7}\cdot\cancel{2^2}\cdot 23$$

$\therefore\ a_1 + 2d = 23$

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a_7 = a_1 + 6d = 13m$

$\therefore\ 4d = 13m - 23 = -10,\ 3,\ 16,\ 29,\ \cdots$

모든 항이 자연수이므로 공차 d도 자연수이다.

$\therefore\ 4d = 16,\ d = 4,\ a_1 = 15$

$\therefore\ a_2 = a_1 + d = 15 + 4 = 19$

Analysis

등차수열의 합

공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 n항까지의 합

① $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$

② $S_n = \dfrac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$

③ $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

Analysis

"자연수, 정수" 조건이 나오면 케이스 나열을 해서 문제를 풀 생각을 해내자.
특히 이때 약수 배수 관계를 활용해야 할 때가 많다.

제 2 교시

수학 영역

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때,
이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

10

(step1) 조건 (가) 분석하기

$\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$에서

❶ $x=1$ 대입

$0 = 1 \times f(1) - 2 - 1$

$\therefore f(1) = 3$

❷ 미분

$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 4x$

⇔ $xf'(x) = 4x$

$\therefore f'(x) = 4$

$\therefore f(x) = 4x + C = 4x - 1$ ($\because f(1) = 3$)

$\therefore F(x) = 2x^2 - x + a$

(step2) 조건 (나) 분석하기

$f(x)G(x) + F(x)g(x)$

$= F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$

$= \{F(x)G(x)\}' = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\therefore F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_1$

$= (2x^2 - x + a)(x^2 + x + c)$

$\therefore G(x) = x^2 + x + c$

$\therefore \int_1^3 g(x)dx = [x^2 + x + c]_1^3 = 10$

Analysis

$g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x=a$ 대입 : $g(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

❷ 미분 : $g'(x) = f(x)$