

지수와 로그



들어가며

1) 자료 소개

: 입시에서 대학의 'Needs'는 무엇일까? **단언컨대 대학의 유일한 Needs는 '우수한 학생을 선발하는 것'이다.** 최상위 대학에 진학하려면 우수한 학생이 되어야 한다.

그렇다면 어떤 학생이 우수한 학생일까? 많은 학생들이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한다. **하지만 이유도 모른 채 기계적으로 답만 잘 맞히는 학생을 우수하다고 생각하는 대학은 없을 것이다.** 대학은 이와 같이 공부한 학생을 떨어뜨리려고 할 것이다. **때문에 상위권과 최상위권을 변별하기 위한 준킬러와 킬러 문항은 '생소한 형태'로 출제된다.**

문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이 시험에서 '생소한 유형'의 문제를 맞닥뜨리면 어떻게 될까? 아마도 제대로 풀지 못할 것이다. 시간만 뺏기고 답을 내지 못하면 멘탈이 무너질 수도 있다. 이렇게 되면 시험을 망칠 가능성이 높다.

그렇다면 어떻게 공부해야 할까? 3년간 공부한 것을 수능에서는 30문제로 평가한다. 때문에 핵심적인 개념과 아이디어 위주로 시험에 출제할 수 밖에 없다. 고난도 문제는 이를 생소한 형태로 출제하는 것일 뿐이다. 면접이나 논술에서도 마찬가지다. **따라서 문제와 그 풀이를 유형화할 것이 아니라, 학습목표에 해당하는 핵심적인 개념과 아이디어에 초점을 맞추고 공부해야 한다.** 핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 문제를 분석하고 해결함으로써, 이것들이 언제 어떻게 쓰이는지, 무엇을 주의해야 하는지 등을 신경 써서 공부하면 된다.

본 자료의 목적은 "핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 다양한 문제를 체계적, 논리적으로 분석하고 해결함으로써, 이를 공부한 학생들이 '생소한 형태의 고난도 문제를 쉽고 정확하게 해결'할 수 있도록 하는 것"이다. 이를 통해 안정적인 1등급 달성하고 최상위권 대학 진학하길 바란다.

2) 누구를 위한 건가요?

- 치열하게 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생
- 생소한 형태의 문제가 두려운 학생
- 안정적인 1등급을 원하는 학생
- 최상위권 대학 진학이 목표인 학생**

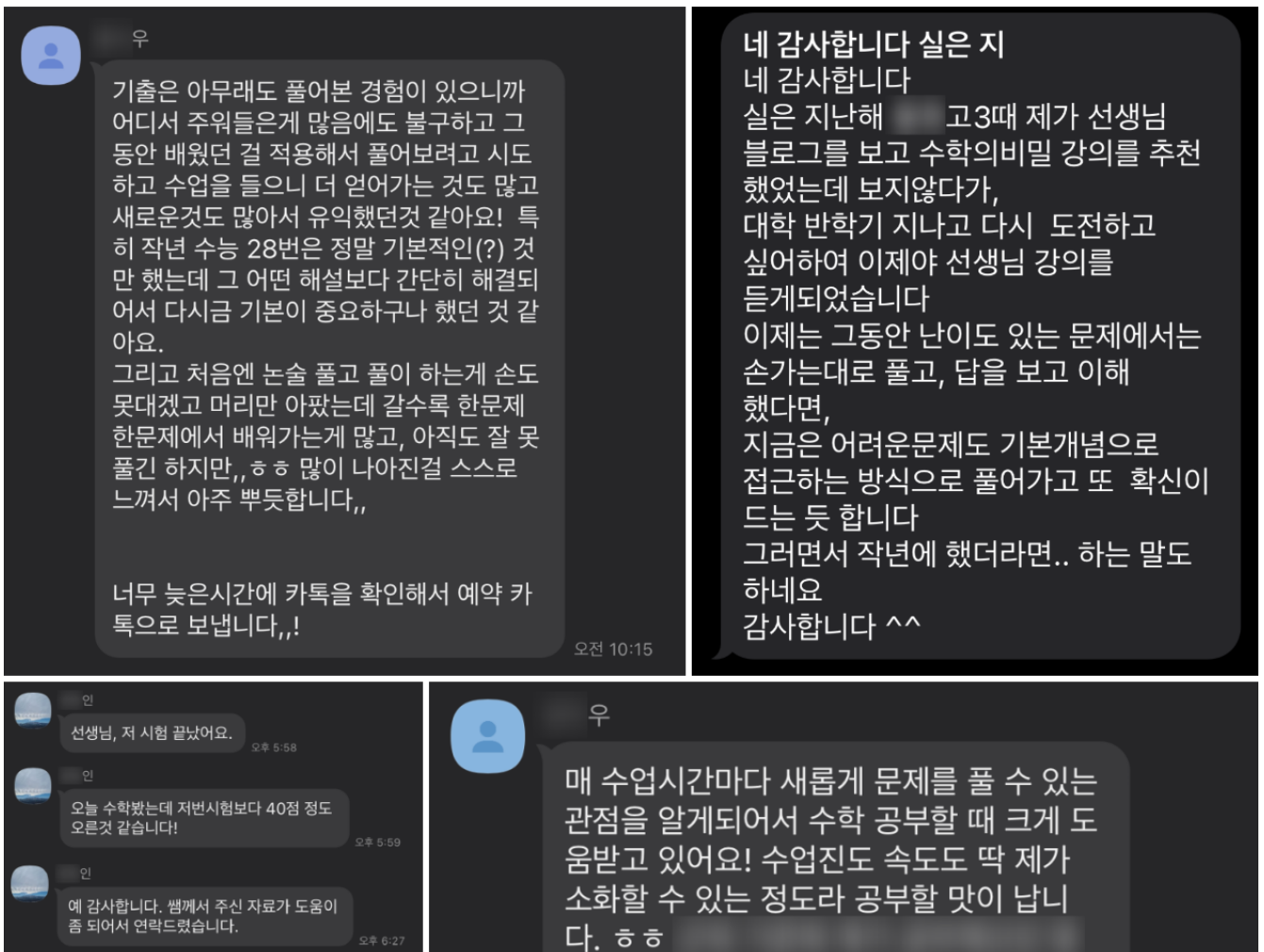
3) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- 핵심 개념과 아이디어에 대한 이해
- 문제를 체계적이고 논리적으로 분석하는 방법
- 생소한 형태의 고난도 문항에 대한 두려움 해소
- 안정적인 1등급 및 최상위권 대학 진학**

4) 어수강 수학

- 홈페이지 : www.soogangmath.com
- 블로그 : blog.naver.com/math-fish
- 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath
- 이메일 : mathfish@snu.ac.kr
- 전자도서 : 당신이 수학을 망치는 N가지 이유, 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀

5) 후기



[지수와 로그]

[문제1] 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 10$ 일 때, $n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중에 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오.¹



[문제2] 함수 $f(x) = -(x - 2)^2 + k$ 에 대하여 다음 조건

$\sqrt{3}^{f(n)}$ 의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9 이다.

을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 2일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.²



[문제3] $2 \leq n \leq 7$ 인 자연수 n 과 정수 a 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (n, a) 의 개수를 구하시오.³

(가) $\sqrt[n]{a} < 0$

(나) $\sqrt[n]{(-1)^n} \times \sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}} = -3$



[문제4] 2 이상의 자연수 m, n 과 실수 a 에 대하여 다음 중 항상 참인 것을 모두 고르시오.⁴

㉠ $\sqrt[n]{a} > 0$

㉡ $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$

㉢ $n = m$ 이면 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a}$ 이다.

㉣ $\{\sqrt[n]{a}\}^m = a$ 이면 $n = m$ 이다.

㉤ $(\sqrt[n]{a^n}) = -a$ 이면 n 은 짝수이고 $a < 0$ 이다.



[문제5] 실수 $a = \frac{1}{2} \left(8^{40} + \frac{1}{8^{40}} \right)$ 에 대하여 $\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 구하시오.⁵



[문제6] 2 이상의 자연수 n 과 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

라 하자. 자연수 n 과 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3\sqrt[n]{8})$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.⁶

(가) $g(0) = f(2\sqrt{2}) = n$

(나) $\sqrt[n]{3}$ 보다 큰 모든 실수 x 에 대하여 $g(-\sqrt[n]{8}) \leq f(x)$ 이다.

(다) $\sqrt[n]{f(-\sqrt{2})} \times \sqrt[n]{g(-\sqrt{2})} \leq \sqrt[3]{6}$



[문제7] 두 실수 x, y 에 대하여 $4^x - 2^y = 4\sqrt{5}$, $2x + y = -2$ 일 때, $4^x + 2^y$ 의 값을 구하시오.⁷



[문제8] 두 실수 a, b 에 대하여 $100^a = 4$, $100^b = 5$ 일 때, $25^{\frac{2-a-b}{2(1-a)}}$ 의 값을 구하시오.⁸



[문제9] 다음 부등식을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.⁹

$$\left(\frac{2n}{7}\right)^{\frac{140-56n}{(2n-5)(3n-22)}} > 4$$



[문제10] 집합 M 을

$$M = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \text{어떤 자연수 } n \text{에 대하여 } \log_2 \left(\frac{n}{m-n} \right)^2 = 4 \right\}$$

라 하자. 집합 M 의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ 라 할 때, $a_1 + a_3 + a_8$ 의 값을 구하시오.¹⁰



[2025학년도 6월 모의고사 14번]

[문제11] 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오.¹¹

(조건) $\log_2 \sqrt{-n^2 + 10n + 75} - \log_4 (75 - kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수가 12이다.



[문제12] $\log_2 xy^2 = 5$ 를 만족하는 두 정수 x, y 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르시오.¹²

- ㉠ $4\log_2 y + \log_2 x^2 - 1 = 9$
- ㉡ $\log_x y = \log_x \sqrt{32} - \frac{1}{2}$
- ㉢ $x + y$ 의 최댓값은 33
- ㉣ $x + y$ 의 최솟값은 6



[문제13] 이차식 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 집합 A_t 를

$$A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 |f(x) - t| = x^{\log_x 3}\}$$

라 하자. 집합 A_t 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.¹³

- (가) $A_8 = \{2, 5, 6\}$
- (나) 어떤 실수 t 에 대하여 $A_{-t^2} = A_{t+1}$ 이다.



[문제14] 두 실수 a, b 에 대하여 $ab > 0$ 이고 $a^2 - 2ab - 9b^2 = 0$ 일 때,

$$\log(a^2 + ab - 6b^2) - \log(a^2 + 4ab + 15b^2)$$

의 값을 구하시오.¹⁴



[문제15] 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오.¹⁵



[문제16] $\log_6 15 = a, \log_{12} 18 = b$ 일 때, $\log_{25} 24$ 를 a, b 로 나타내시오.¹⁶



[2013학년도 수능 30번]

[문제17] 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

$$\{(x, y) | 2^x - n \leq y \leq \log_2(x + n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n 이라 하자.

(가) x 좌표와 y 좌표는 서로 같다.

(나) x 좌표와 y 좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2, a_2 = 4$ 이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구하시오.¹⁷



[문제18] 다음 조건을 만족시키는 500 이하의 두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오.¹⁸

$$(\text{조건}) \log_{2n} \sqrt{m} + \log_{2n} \sqrt{m+1} \times \log_{m+1} m = \frac{3}{2}$$

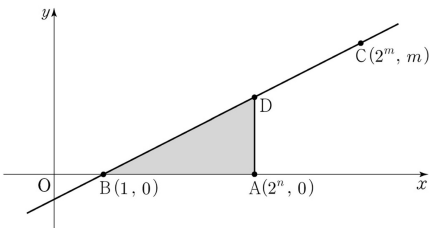


[2015학년도 수능 21번]

[문제19] 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m 을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.¹⁹

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$ 이다.

(나) 두 점 B(1, 0)과 C($2^m, m$)을 지나는 직선 위의 점 중 x 좌표가 2^n 인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$ 보다 작거나 같다.



[문제20] 방정식 $4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$ 이 실근을 갖기 위한 양수 a 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오.²⁰



[문제21] x 에 대한 방정식 $9^x + 9^{-x} - n(3^x + 3^{-x}) + 18 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖도록 하는 자연수 n 의 값을 구하시오.²¹



[문제22] 두 함수 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $g(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)에 대하여, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 두 함수 $y = f(g(x))$, $y = g(f(x))$ 의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하시오.²²



[문제23] 다음 물음에 답하시오.²³

- (1) $x > 1$ 일 때, 함수 $y = \log_5 x + \log_x 625$ 의 최솟값을 구하시오.
(2) $\frac{1}{4} < x < 25$ 일 때, 함수 $y = \log 4x \times \log \frac{25}{x}$ 의 최댓값을 구하시오.



[문제24] $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = 9x^{-2+\log_3 x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.²⁴



[2013학년도 6월 모의고사 30번]

[문제25] 3보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geq 3$

(나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

$f(4) + f(5) + f(6) + \cdots + f(20)$ 의 값을 구하시오.²⁵



[문제26] 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$f(2x) + 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 4^x$$

를 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.²⁶



[문제27] $-3 \leq x \leq 2$ 에서 x 에 대한 부등식 $4^x - 5 \times 2^{x+2} \geq 4^a - 5 \times 2^{a+2}$ 이 항상 성립하도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합을 구하시오.²⁷



[문제28] 1이 아닌 양수 a 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 를

$$f(x) = \log_a a(x+2), \quad g(x) = a^{x-1} - 2$$

라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 A, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.²⁸



[2023학년도 수능특강 수학 I, 18p, 문제 6번]

[문제29] 서로 다른 세 양의 실수 a, b, c ($a \neq 1, b \neq 1$)가 다음 조건

(가) $\log_a b = \log_b c$

(나) $b \times c = a^2$

을 만족할 때, $\log_a \frac{c}{b}$ 의 값을 구하시오.²⁹



[2023학년도 6월 모의고사 21번]

[문제30] 자연수 n 에 대하여 $4 \log_{64} \left(\frac{3}{4n+16} \right)$ 의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n 의 값의 합을 구하시오.³⁰



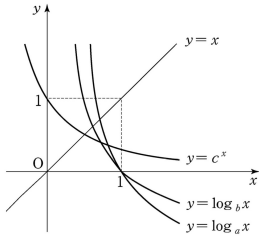
[문제31] x 에 대한 부등식

$$x^{\log_a \sqrt{x}} > a^3 x$$

이 $\frac{1}{64} < x < \frac{1}{16}$ 인 모든 x 에 대하여 성립하고, $x = 9$ 에 대하여 성립하지 않도록 하는 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.³¹



[문제32] 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 세 함수 $y = \log_a x, y = \log_b x, y = c^x$ 의 그래프가 다음과 같을 때, a, b, c 의 대소를 비교하시오.³²



[문제33] 지수함수 a^{-x^2+2x-5} 의 최솟값이 16일 때, 양수 a 의 값을 구하시오.³³



[문제34] $0 < a < b < c < 1$ 을 만족시키는 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$A = a^a b^b c^c, B = a^a b^c c^b, C = a^b b^c c^a$$

의 대소를 비교하시오.³⁴



[문제35] 2 이상의 자연수 a 에 대하여 함수 $y = a^x \times \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 의 그래프와 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 이 만나지 않고, 함수 $y = \frac{9^x \times a^{2x}}{100^x}$ 의 그래프와 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 이 만나도록 하는 a 의 개수를 구하시오.³⁵



[문제36] 두 실수 a, b 가 $a^2 < a < b < b^2$ 을 만족시킬 때, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.³⁶

- ㉠ $a^a > a^{\frac{1}{a}}$
- ㉡ $b^{\frac{1}{b}} > b^{-b}$
- ㉢ $\left(\frac{a}{b}\right)^b < a^{-b}$



[2021학년도 6월 모의고사 가형 18번]

[문제37] 두 곡선 $y = 2^x, y = -2x^2 + 2$ 이 만나는 두 점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자. $x_1 < x_2$ 일 때, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.³⁷

- ㉠ $x_2 > \frac{1}{2}$
- ㉡ $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$
- ㉢ $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$



[2012학년도 수능 가형 30]

[문제38] 2 이상 10 이하인 자연수 a, b 에 대하여 두 곡선 $y = a^{x+1}, y = b^x$ 이 직선 $x = t$ (단, $t \geq 1$)와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $t \geq 1$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $\overline{PQ} \leq 10$ 일 때, 가능한 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.³⁸



[2021학년도 수능특강 수학 I, 35p, 문제 3번]

[문제39] 자연수 n 에 대하여 직선 $y = t$ (t 는 실수)와 두 곡선 $y = \log_3 x, y = \log_3 (x - n)$ 이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_3 x$ 와 만나는 점을 R이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수를 구하시오.³⁹

(가) $1 \leq n \leq 50$

(나) 어떤 음이 아닌 실수 t 에 대하여 $\overline{PQ} + \overline{QR} \geq 20$



[2025학년도 5월 모의고사 13번]

[문제40] 두 상수 a, b ($b > 0$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+3} + b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5} + 3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값이 $4b+8$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $k > b$)⁴⁰

(조건) $b < t < k$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수는 1이다.



[2023학년도 6월 모의고사 21번]

[문제41] 실수 t 에 대하여 두 곡선 $y = t - \log_2 x$ 와 $y = 2^{x-t}$ 가 만나는 점의 x 좌표를 $f(t)$ 라 할 때, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.⁴¹

- ㉠ $f(1) = 1$ 이고 $f(2) = 2$ 이다.
- ㉡ 실수 t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다.
- ㉢ 모든 양의 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq t$ 이다.



[2023학년도 수능 수학 21번]

[문제42] 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} |3^{x+2} - n| & (x < 0) \\ |\log_2(x+4) - n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.⁴²



[2024학년도 9월 모의고사 14번]

[문제43] 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.⁴³

(조건) 집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다.



정답

¹ 25

² 9

³ 5개

⁴ ⊖

⁵ 15

⁶ 최댓값은 24이고 최솟값은 18

⁷ 9

⁸ $10\sqrt{5}$

⁹ 18

¹⁰ 27

¹¹ 9

¹² ⊖

¹³ 72

¹⁴ $-\frac{1}{2}$

¹⁵ 162

¹⁶ $\frac{5-b}{2(a+ab-2b+1)}$

¹⁷ 573

¹⁸ 3

¹⁹ 109

²⁰ 36

²¹ 9

²² $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

²³ (1) 4, (2) 1

²⁴ 246

²⁵ 56

²⁶ -4

²⁷ 9

²⁸ $2\sqrt{2}$

²⁹ 6

³⁰ 426

³¹ $\frac{13}{3}$

³² $c < b < a$

³³ $\frac{1}{2}$

³⁴ $A > B > C$

³⁵ 1

36 $\ominus, \omin�, \omin�$

37 $\omin�, \omin�, \omin�$

38 39

39 33

40 9

41 $\omin�, \omin�$

42 33

43 13