제 2 교시

수학 영역

홀수형

1. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x^2}=1$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 실수 a의 개수가 무수히 많을 때, $f(1)=3$, $f'(x)\le 0$이다. $f(4)$의 최댓값을 구하시오.

3. 자연수 n에 대하여 $3n^2$의 n제곱근 중 양수인 것의 정수부분을 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{20} f(n)$의 값을 구하시오.

4. 첫째항이 모두 자연수이고 공차와 공비가 각각 2인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{6}(a_n - b_n) = 0$$

을 만족시킬 때, $a_1 \times b_1$의 최솟값을 구하시오.

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\frac{d}{dx}[\int \{f'(x)+g'(x)\}dx] = 6x^2-4x+9,$$

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = 24x^3-36x^2+48x-36$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$ 모두 $x=1$에서만 x축과 만날 때, $|f(2)-g(2)|$의 값을 구하시오.

6. 극댓값 2, 극솟값 -2를 갖는 삼차함수 $f(x)$가

$$\{x|f'(x)>0\} = \{x|0<x<2\}$$

를 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오.

7. 세 실수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(x-b)+cx & (a\le x\le b)\\ 2x-5 & (x<a, x>b)\end{cases}$$

가 $\lim_{x\to a+}\{f(x)+4x\}=\lim_{x\to b}\{f(x)\}=5$를 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

8. $\angle A<\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 대하여 그 넓이를 S_1, 외접원의 넓이를 S_2라 할 때,

$$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad S_1=\frac{9\sqrt{2}}{2},\quad S_2=18\pi$$

이다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

9. 실수 a에 대하여 최고차항의 계수가 각각 $-1, 2$인 이차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가

$$f(-1)=f(-a^2+6a-5)=g(-a^2+6a-5)=0$$

을 만족시킨다. 이때, y축과 곡선 $y=f(x)$및 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 S, 넓이가 최대가 되도록 하는 a의 값을 k라 할 때, $S\times k$의 값을 구하시오. (단, $1<a<5$이다.)

10. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 3이다.

$f'(2)\geq 0$일 때, 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

11. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n \le n)\\ \log_2 a_n & (a_n > n)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $\log_2 a_{2025}+a_{2026}$의 값을 구하시오.

12. 실수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\log_2(x-a)$$

의 점근선이 직선 $x=4$일 때, $f(5a)$의 값을 구하시오.

13. 점 $(0,3)$에서 곡선 $y=-x^3+3x^2+4\ (x>0)$에 그은 접선의 기울기를 구하시오.

14. 함수

$$f(x)=2\sin(ax+b\pi)+2$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 자연수 a와 실수 b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (단, $0<b<1$이다.)

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) 열린구간 $(0,6\pi)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 12이다.

15. $t<a$를 만족시키는 두 실수 a, t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & (x\le a) \\ 4x^2-15x & (x>a) \end{cases}$$

가 열린구간 $(t, t+3)$에서 연속이 되도록 하는 a의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 이때, 실수 k에 대하여 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

16. 실수 a에 대하여 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 할 때,

$$v_1=2t^2+(4-4a)t+4a-6$$

$$v_2=v_1\times(t-a^2+3a-3)$$

이다. 점 P는 운동 방향을 2번, 점 Q는 운동 방향을 한 번만 바꿀 때, a의 값을 구하시오.

17. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\pi\sin^3(\frac{\pi k}{3n})+\pi\sin(\frac{\pi k}{3n})\cos^2(\frac{\pi k}{3n})\right\}\right]$의 값을 구하시오.

18. 양수 k에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$가

$$f(g(x))=\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$$

을 만족시킨다. $f(g(k))=f'(g(k))=\frac{1}{3}$일 때, $k+3g'(k)$의 값을 구하시오.

19. 실수 a에 대하여 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=at,\ y=4e^{t}+e^{-t}$$

의 $t=\ln 3$에서의 접선의 기울기가 $\frac{35}{12}$일 때, $x=0$에서 $x=12$까지의 곡선의 길이는?

① $\frac{e^3}{4}+9-\frac{1}{e^3}$ ② $\frac{e^3}{2}+6-\frac{1}{e^3}$ ③ $e^3+3-\frac{1}{e^3}$

④ $2e^3-\frac{1}{e^3}$ ⑤ $4e^3-3-\frac{1}{e^3}$

20. 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=3x$와 점 $(0,0)$에서 접하는 함수

$$f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$$

에 대하여 그 역함수를 $g(x)$라 하자. 점 $\mathrm{P}(p, f(p))$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 함수 $f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 함수 $g(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같다. $f(-p)$의 값을 구하시오.

답안

1. 4
2. 3
3. 27
4. 32
5. 11
6. 52
7. 7
8. 18
9. 104
10. 4
11. 32
12. 4
13. 3
14. 8
15. 10
16. 3
17. 3
18. 2
19. ⑤
20. 4